UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

57. BAND, 2. HEFT
(AUSGEGEBEN IM JUNI 1953)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1953

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

57. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Oppenheim, A. Value of quadratic forms III 97

Blanuša, D. Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum 102

Fuchs, L. Über die Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen 109

Prachar, K. Über ein Problem vom Waring-Goldbach'schen Typ II 113

Bukovics, E. Eine topologische Invariante von sechs Linienelementen zweiter Ordnung eines Punktes der Ebene 117

Müller, H. R. Flächenläufige Bewegungsvorgänge im elliptischen Raum II . . . 129

Kruppa, E. Eine projektive Invariante von drei Linienelementen n-ter Ordnung mit einem gemeinsamen Linienelement $(n-1)$-ter Ordnung 134

Bereis, R. Eine Bemerkung zur projektiven Invariante Jn in der voranstehenden Arbeit von E. Kruppa 140

Weitzenböck, R. W. Die Flachtangenten der ebenen Kurven vierter Ordnung . 142

Buchbesprechungen 170

Value of quadratic forms III.

By

A. Oppenheim, Singapore.

(Received August 7, 1952.)

In a note (1) with the same title I proved the following theorem about indefinite quadratic forms f in n variables.

Theorem 1. If f represents zero for integers not all zero, if f is not a multiple of a rational form, and if $n \geqq 5$, then the inequalities

$$o < f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \epsilon$$

are solvable in integers $x_1, \ldots, x_n$ for every positive ϵ.

This theorem (which is false for $n = 2$) was conjectured to be true for $n \geqq 3$. Its proof for $n \geqq 3$ was reduced to proving the theorem which follows.

Theorem 2. If $n \geqq 3$ and if

$$Q = x_1 x_2 + \theta x_2^2 + c_3 x_3^2 + \ldots + c_n x_n^2$$

where θ is irrational and $c_3, \ldots, c_n$ are non-zero integers, then the inequalities

$$o < Q < \epsilon$$

are solvable in integers $x_1, \ldots, x_n$ for every positive ϵ.

I proved Theorem 2 for $n \geqq 5$. My proof depended on (*i*) the uniform distribution modulo 1 of the numbers θx_2^2 for integers x_2 and (*ii*) the theorem (interesting in itself) that an integral ternary quadratic form represents *some* arithmetical progression.

Recently Prof. Heilbronn pointed out to me that Theorem 2 is true for $n = 4$. His proof (as yet unpublished) uses (*iii*) the uniform distribution of θx_2^2 modulo 1 for squarefree integers x_2 prime to a given integer D and (iv) the solvability of the congruence

$$\Phi(x, y) \equiv m \pmod{x_2}$$

for any integer m if the odd squarefree integer x_2 is prime to the discriminant of the integral binary quadratic form $\Phi(x, y)$.

Prof. *Heilbronn* mentioned to me a very deep theorem of *Vinogradow* (2) on trigonometric sums from which it follows by a classical theorem of *Weyl* (3) that (v) the numbers $\theta\, x_2^2$ are uniformly distributed modulo 1 for *primes* x_2.

Using (v) and (vi) the theorem that an integral binary quadratic form represents the numbers $\sigma^2\, p$ where σ is a certain fixed integer and p is any prime belonging to a certain arithmetical progression, I obtained another proof of Theorem 2 for $n = 4$ which is different from that found by Prof. *Heilbronn*.

There remains still unsettled the case $n = 3$ which reduces to this question: *given an irrational* θ *are the inequalities*

$$0 < |\, xy + \theta\, y^2 - z^2 \,| < \epsilon$$

solvable in integers x, y, z *for every positive* ϵ?

As stated above primes p and integers m exist such that

$$|\, \theta\, p^2 - m \,| < \epsilon$$

for every positive ϵ. If it is true that m is a quadratic residue modulo p for infinitely many such primes p, then the conjecture for $n = 3$ would follow at once.

I proceed to prove Theorem 2 for $n = 4$. We may of course assume that the partial quotients in the simple continued fraction for θ are bounded for if these partial quotients are unbounded then for each $\epsilon > 0$ the inequalities

$$0 < |\, xy + \theta\, y^2 \,| < \epsilon$$

are solvable in integers x and y.

We may assume also that the integers c_3, c_4 are squarefree.

2. *Lemma 1 Let* θ *be irrational*: let a (*not zero*) *and b be assigned integers. For every* $\epsilon > 0$ *there exists a prime p and an integer m such that.*

$$|\, \theta\, p^2 - a\, m - b \,| < \epsilon.$$

In 1916 *Weyl* (3) proved the important theorem: the necessary and sufficient condition for the uniform distribution of the numbers $f(n)$ modulo 1 is that

$$\Sigma_1^N \exp\{2\pi i\, h\, f(N)\} = o(N)$$

as $N \to \infty$ for each integer $h = 1, 2, 3, \ldots$.

Now in some very important papers Vinogradow (2) has proved even more than this for the polynomial

$$f(n) = a_1\, p_n^k + a_2\, p_n^{k-1} + \ldots + a_{k+1}$$

where p_n is the n-th prime and the numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ are real, $\alpha_1 \neq 0$. Lemma 1 follows by taking

$$f(n) = \theta\, p_n^2/a.$$

Lemma 2 If θ in Lemma 1 has bounded partial quotients then for all small enough $\epsilon > 0$, primes p and integers m exist with

$$|\theta\, p^2 - a\, m - b| < \epsilon$$

and p not a divisor of $a\, m + b$.

(This Lemma holds also if θ has unbounded partial quotients).

If θ has bounded partial quotients there is a constant $c = c(\theta) > 0$ such that

$$|\theta\, x^2 - x\, y| \geqq c$$

for all integers $x\ (\neq 0)$ and y. Take $0 < \epsilon < c$ and apply Lemma 1. If $a\, m + b = py$ we get a contradiction. Hence p does not divide $am+b$.

3. *Properties of integral binary quadratic forms*

Let

$$\Phi(x, y) = ax^2 + 2\, bxy + cy^2$$

be a positive definite or indefinite quadratic form in integral variables x, y with integral coefficients a, b, c and non-zero determinant $D = ac - b^2$ ($-D$ not a rational square). Assume further that Φ is *properly primitive*, i. e. that the greatest common divisor of $a, 2\,b, c$ is unity.

The form Φ belongs to a class of forms equivalent under unimodular transformations. Any number properly represented by Φ (i. e. for coprime integers x, y) and prime to $2\,D$ has certain quadratic characters with respect to the prime divisors of $2\,D$. These characters are the *same* for all such numbers properly represented by Φ and prime to $2\,D$.

Any form in the class to which Φ belongs has of course the same set of characters as Φ. But the set of forms (of the same signature and determinant as Φ) with the same characters as Φ may be wider than the class. This set is called a *genus*. The genus to which Φ belongs has in it a finite number of classes, $C_1, C_2, \ldots, C_h$ $(h \geqq 1)$. Let $\Phi = \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_h$ be representatives of each of these classes.

There exists a rational transformation with denominator prime to $2\,D$ and determinant unity which carries Φ into Φ_j; so that

$$\Phi(\alpha_j x + \beta_j y, \gamma_j x + \delta_j y) \equiv \sigma^2_j\, \Phi_j(x, y)$$

where $\alpha_j, \ldots, \delta_j, \sigma_j$ are integers with σ_j prime to $2D$ such that $\alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j = \sigma_j^2$. Suppose now that Φ_j represents an integer n_j: then plainly Φ will represent (but not necessarily properly) the integer $\sigma_j^2 n_j$. Let σ be the least common multiple of the integers σ_j. It follows that Φ *will represent all* $\sigma^2 n$ *where* n *is any integer represented by any form in the genus determined by* Φ.

Consider now any integer b, prime to $2D$, properly represented by Φ. Any member of the arithmetic progression $4Dk+b$ $(k=1,2,\ldots)$ will be compatible with the genus. Each prime, q, in this progression (and by Dirichlet's theorem the progression contains an infinity of primes) will have $-D$ as a quadratic residue and in consequence is represented by one of the forms in the genus determined by Φ. It follows that Φ *represents the integers* $\sigma^2 q$ *where* q *is any prime in the primitive arithmetic progression* $4Dk+b$ $(k=1,2,3,\ldots)$.

4. Consider now the quaternary form

$$Q = xy + \theta y^2 + \Phi(z, t)$$

where θ is irrational and Φ is a properly primitive positive definite or indefinite integral binary quadratic form which (by Sec. 3) represents each $\sigma^2 q$ where σ is a certain fixed integer and q is any prime in a certain arithmetic progression $4Dk+b$ $(k=1,2,3,\ldots)$ with b prime to $4D$.

Given $\epsilon > 0$, we can choose (Lemma 2) a prime p and an integer m such that p does not divide $4Dm-b$ and

$$\theta p^2 = (4Dm-b)\sigma^2 + \delta, \; |\delta| < \epsilon.$$

Take $x = -4Du\sigma^2$, $y = p$ so that

$$Q(x, y, z, t) = -\sigma^2 v + \Phi(z, t) + \delta$$

where

$$v = 4Dpu - 4Dm + b = 4D(up - m) + b$$

Since $4Dp$ is prime to $4Dm - b$, v is a positive prime, q, for an appropriate integer u. But this prime q is in the arithmetic progression $4Dk+b$. Hence integers z, t exist with $\Phi(z, t) = \sigma^2 q$. It follows that for each positive ϵ integers x, y, z, t exist with

$$0 < |Q(x, y, z, t)| = |\delta| < \epsilon.$$

Theorem 2 is therefore proved since I have shown (1) that the solvability of $0 < Q < \epsilon$ involves that of $0 < -Q < \epsilon$, Q being an indefinite form in *three* or more variables.

References.

1. *Oppenheim, A.*: Values of quadratic forms, I, II, (To appear in *Quarterly Journal*).

2. *Vinogradow, I. M.*: New estimations of trigonometrical sums containing primes (Review in *Zent. für Math.* 17 (1938), 390).

3. *Weyl, H.*: Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Ann. 77 (1916), 313—352.

Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum.

Von

Danilo Blanuša, Zagreb.

(Eingelangt am 3. November 1952.)

Nach einem Resultat von *L. Bieberbach*[1] läßt sich die hyperbolische Ebene isometrisch und singularitätenfrei gemäß den Formeln

$$x_{2n-1} + ix_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}(x + iy)^n \quad (n \geqq 1)$$

im Hilbertschen Raum einbetten. Es scheint jedoch, daß sich diese Formeln nicht auf den Fall eines mehrdimensionalen hyperbolischen Raumes verallgemeinern lassen. Wir wollen daher versuchen, eine andere Einbettung der hyperbolischen Ebene im Hilbertschen Raum zu finden, die in dieser Hinsicht verallgemeinerungsfähig ist.

Zu diesem Zweck gehen wir von den Formeln

$$x_1 = \int_{\frac{1}{R}}^{y} \frac{\sqrt{R^2 y^2 - 1}}{y^2}\, dy, \quad x_2 = \frac{\cos(Ry_1)}{y}, \quad x_3 = \frac{\sin(Ry_1)}{y} \tag{1}$$

aus, die bekanntlich die durch die Pseudosphäre gegebene isometrische Einbettung der hyperbolischen Ebene im dreidimensionalen Euklidischen Raum bestimmen. Allerdings ist dabei nur der innerhalb eines Grenzkreises befindliche Teil der hyperbolischen Ebene eingebettet, und außerdem ist die Zuordnung zwischen den Punkten dieses Teiles und denen der Pseudosphäre nicht eineindeutig, da ja das Innere des Grenzkreises unendlich oft auf die Pseudosphäre aufgewickelt ist. Die metrische Differentialform erhält man leicht zu

---

[1] *L. Bieberbach*, Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. Comment. math. helv. 4, 1932, S.248—255.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \frac{dy^2 + dy_1^2}{y^2}.$$

Interpretiert man y und y_1 als rechtwinklige Koordinaten, so erhält man, wie bekannt, das Poincarésche Modell der hyperbolischen Ebene als Halbebene $y > 0$. Der Integrand in (1) ist jedoch nur für $y \geqq \frac{1}{R}$ reell, so daß der Teil $0 < y < \frac{1}{R}$ nicht eingebettet ist.

Nach *A. Brill*[2] läßt sich der dreidimensionale hyperbolische Raum analog in einem fünfdimensionalen Euklidischen einbetten, gemäß den analogen Formeln

$$x_1 = \frac{\cos(Ry_1)}{y}, \quad x_2 = \frac{\sin(Ry_1)}{y}$$

$$x_3 = \frac{\cos(Ry_2)}{y}, \quad x_4 = \frac{\sin(Ry_2)}{y},$$

$$x_5 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{R}}^{y} \frac{\sqrt{R^2 y^2 - 2}}{y^2}\, dy.$$

(Bei *Brill* sind die Integrationsgrenzen weggelassen und es steht ein Minuszeichen vor dem Integral.) Hier muß man nun $y \geqq \frac{\sqrt{2}}{R}$ sein. Es ist also nur der innerhalb einer Grenzkugel liegende Teil des hyperbolischen Raumes eingebettet. Völlig analog erhält man durch die Formeln

$$x_{2r-1} = \frac{\cos(Ry_r)}{y}, \quad x_{2r} = \frac{\sin(Ry_r)}{y} \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$x_0 = \int_{\frac{\sqrt{n-1}}{R}}^{y} \frac{\sqrt{R^2 y^2 - (n-1)}}{y^2} dy \tag{2}$$

eine teilweise Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes in einem $(2n-1)$-dimensionalen Euklidischen. Die Metrik ist hier gegeben durch

[2] *A. Brill*, Bemerkung über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen. Math. Ann. 26, 1886, S. 300—303.

$$ds^2 = dx_0^2 + \sum_{i=1}^{2n-2} dx_i^2 = \frac{dy^2 + dy_1^2 + \ldots + dy_{n-1}^2}{y^2} \tag{3}$$

und y ist der Bedingung $y \geqq \frac{\sqrt{n-1}}{R}$ unterworfen, während dem ganzen hyperbolischen Raum alle Werte $y > 0$ entsprechen.

Wir wollen nun eine den Formeln (1) analoge Einbettung im Hilbertschen Raum suchen, bei der jedoch die ganze hyperbolische Ebene eingebettet und außerdem die Zuordnung zwischen den Punkten der hyperbolischen Ebene und der erhaltenen Fläche eineindeutig sein soll. Wenn dies gelingt, können wir erwarten, daß sich das Resultat verallgemeinern lassen wird, analog wie (1) zu (2) verallgemeinert ist.

Wir setzen zu diesem Zweck

$$x_0 = F(y),$$

$$x_{2r-1} = f_r(y) \cos(a_r y_1), \quad x_{2r} = f_r(y) \sin(a_r y_1) \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

und verlangen, daß

$$ds^2 = dx_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} dx_i^2 = \frac{dy^2 + dy_1^2}{y^2}$$

die metrische Differentialform der Fläche sein soll. Daraus folgen die Gleichungen

$$\sum_{r=1}^{\infty} [f'_r(y)]^2 + [F'(y)]^2 = \frac{R^2}{y^2}, \tag{4}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 [f_r(y)]^2 = \frac{R^2}{y^2}. \tag{5}$$

Da $F'(y)$ für jedes $y > 0$ reell sein soll, muß also

$$\sum_{r=1}^{\infty} [f'_r(y)]^2 \leqq \frac{R^2}{y^2} \qquad (y > 0) \tag{6}$$

gefordert werden.

Um zu reellen Funktionen $f_r(y)$ und Zahlenwerten a_r zu gelangen, müssen wir die rechte Seite von (4) in eine Reihe entwickeln, deren Glieder für jedes $y > 0$ positiv bleiben. Wir setzen

$$t = \frac{1}{1+y^2}, \quad y^2 = \frac{1-t}{t},$$

also

$$\frac{1}{y^2} = \frac{t}{1-t} = t + t^2 + t^3 + \ldots .$$

Da aus $y > 0$ sogleich $0 < t < 1$ folgt, ist diese Reihe für alle in Betracht kommenden Werte von t konvergent und die Glieder sind positiv. Wir können also nach (5)

$$f_r(y) = \frac{R}{a_r}\, t^{\frac{r}{2}}$$

setzen, wobei die Wurzel stets positiv genommen sei. Wegen

$$\frac{dt}{dy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} = -\frac{1}{y}\,\frac{2y^2}{(1+y^2)^2} = -\frac{2}{y}(1-t)\,t$$

wird

$$f'_r(y) = -\frac{Rr}{a_r y}\, t^{\frac{r}{2}}(1-t),$$

also

$$[f'_r(y)]^2 = \frac{R^2}{y^2}\,\frac{r^2}{a_r^2}\,(t^r - 2t^{r+1} + t^{r+2}). \tag{7}$$

Es wird daher nach leichter Umordnung der Reihenglieder

$$\sum_{r=1}^{\infty} [f_r'(y)]^2 = \frac{R^2}{y^2}\left\{\frac{t}{a_1^2} + \left(\frac{4}{a_2^2} - \frac{2}{a_1^2}\right) t^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{r^2}{a_r^2} - \frac{2(r-1)^2}{a_{r-1}^2} + \frac{(r-2)^2}{a_{r-2}^2}\right) t^r\right\},$$

wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß die Koeffizienten a_r so gewählt sind, daß die absolute Konvergenz für $|t| < 1$ gesichert und daher die Umordnung zulässig ist.

Wir setzen nun die erhaltene Reihe gleich $\frac{R^2}{y^2}\,t$, womit wegen $0 < t < 1$ die Forderung (6) erfüllt ist. Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\frac{1}{a_1^2} = 1, \quad \frac{4}{a_2^2} - \frac{2}{a_1^2} = 0, \quad \frac{r^2}{a_r^2} - \frac{2(r-1)^2}{a_{r-1}^2} + \frac{(r-2)^2}{a_{r-2}^2} = 0 \quad (r = 3, 4, \ldots),$$

und dies ist offensichtlich durch

$$a_r = \sqrt{r} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

erfüllt. Jetzt ist leicht, nachträglich die absolute Konvergenz der Reihe mit den Gliedern (7) zu erkennen und der Vorgang ist gerechtfertigt. Es wird weiter

$$[F'(y)]^2 = \frac{R^2}{y^2} - \frac{R^2}{y^2}\,t = R^2\,t = \frac{R^2}{1+y^2},$$

also

$$F(y) = R\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = R\,\mathrm{ar\,sh}\,y = R\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

Die gewünschte Einbettung lautet also

$$x_0 = R\,\mathrm{ar\,sh}\,y, \tag{8}$$

$$x_{2r-1} = \frac{R\cos\left(\sqrt{r}\;y_1\right)}{\sqrt{r}\;(1+y^2)^{\frac{r}{2}}}, \quad x_{2r} = \frac{R\sin\left(\sqrt{r}\;y_1\right)}{\sqrt{r}\;(1+y^2)^{\frac{r}{2}}} \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Bevor wir die zu (2) analoge Verallgemeinerung durchführen, wollen wir uns der Eigenschaften der erhaltenen Einbettung vergewissern.

Die Fläche ist tatsächlich im Hilbertschen Raum eingebettet, denn es ist

$$x_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = R^2\,(\mathrm{ar\,sh}\,y)^2 + R^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r\,(1+y^2)^r}$$

offenbar konvergent.

Die Zuordnung zwischen der hyperbolischen Ebene und der Fläche ist eineindeutig. In der Tat entspricht jedem Paar ($y > 0$, y_1 beliebig) ein und nur ein Punkt des Hilbertschen Raumes. Umgekehrt können einem Punkt des Hilbertschen Raumes nicht zwei verschiedene Wertepaare (y, y_1) entsprechen. Man sieht das leicht aus den in (9) enthaltenen Gleichungen

$$x_1 = \frac{R\cos y_1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad x_2 = \frac{R\sin y_1}{\sqrt{1+y^2}} \tag{10}$$

und

$$x_3 = \frac{R\cos\left(\sqrt{2}\;y_1\right)}{\sqrt{2}\;(1+y^2)}, \quad x_4 = \frac{R\sin\left(\sqrt{2}\;y_1\right)}{\sqrt{2}\;(1+y^2)}. \tag{11}$$

Wegen

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{R^2}{1+y^2}$$

muß y für beide Punkte dasselbe sein. Sollen nun diesen zwei Punkten zwei verschiedene Werte y_1 und $\bar{y}_1$ entsprechen, so muß wegen (10)

$$y = \bar{y} + 2k\pi \qquad (k \text{ ganz} \neq 0)$$

sein, wobei man aber in (11) wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ sicher nicht dasselbe Wertpaar x_3, x_4 erhält.

Die Fläche ist singularitätenfrei, denn die Matrix der Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y}$ und $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ hat den Rang 2. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \end{vmatrix} = -\frac{R^2\, y}{(1+y^2)^2}$$

ist ja für $y > 0$ stets von Null verschieden.

Die Fläche befindet sich nicht in einem n-dimensionalen ebenen Teilraum des Hilbertschen Raumes. Das sieht man etwa folgendermaßen. Sind $\xi_1, \ldots, \xi_n$ rechtwinklige Koordinaten in diesem Teilraum, so wäre ein solcher Raum durch Gleichungen der Form

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \xi_k + b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

gegeben.

Da die ξ_k eines Punktes des Teilraumes durch die betreffenden x_i bestimmt sind, muß es im System (12) n Gleichungen geben, für die die Determinante der a_{ik} von Null verschieden ist, so daß sich die ξ_k berechnen lassen. Es werden also die ξ_k durch gewisse x_{α_r} $(r = 1, \ldots, n)$ linear ausgedrückt sein, d. h.

$$\xi_k = \sum_{r=1}^{n} A_{kr}\, x_{\alpha_r} + B_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Setzt man nun die Funktionen (8), (9) ein, so muß

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} d\xi_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} A_{kr}\, dx_{\alpha_r} \right)^2 = R^2\, \frac{dy^2 + dy_1^2}{y^2}$$

sein. Insbesondere wird z. B.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} A_{kr} \frac{\partial x_{\alpha_r}}{\partial y_1} \right)^2 = \frac{R^2}{y^2}.$$

Der linke Ausdruck besteht nun aus einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form

$$A\, \frac{R^2\, \frac{\cos}{\sin}\, (\sqrt{p}\, y_1)\, \frac{\cos}{\sin}\, (\sqrt{q}\, y_1)}{(1+y^2)^{\frac{p+q}{2}}}$$

und bleibt für $y \to 0$ jedenfalls endlich. Die rechte Seite soll jedoch gegen ∞ streben.

Die Frage der singularitätenfreien Einbettbarkeit der hyperbolischen Ebene in einem n-dimensionalen Euklidischen Raum bleibt also nach wie vor offen.

Es ist nun ein Leichtes, die den Gleichungen (2) analoge Verallgemeinerung durchzuführen. Ein n-dimensionaler hyperbolischer Raum ist demnach durch die Gleichungen

$$x_0 = R \operatorname{ar\,sh} y \tag{13}$$

$$x_{2(r-1)(n-1)+2s-1} = \frac{R \cos\left(\sqrt{r(n-1)}\, y_s\right)}{\sqrt{r(n-1)}\,(1+y^2)^{\frac{r}{2}}} \quad \begin{matrix}(r = 1, 2, \ldots; \\ s = 1, 2, \ldots, n-1)\end{matrix} \tag{14}$$

$$x_{2(r-1)(n-1)+2s} = \frac{R \sin\left(\sqrt{r(n-1)}\, y_s\right)}{\sqrt{r(n-1)}\,(1+y^2)^{\frac{r}{2}}} \quad \begin{matrix}(r = 1, 2, \ldots; \\ s = 1, 2, \ldots, n-1)\end{matrix} \tag{15}$$

in einem Hilbertschen Raum eingebettet. Man bestätigt leicht, daß das ds^2 die Form (3) hat, und es sind auch die vorhin bewiesenen Eigenschaften der Einbettung (8), (9) durch analoge Betrachtungen nachweisbar.

Über die Zerlegung einer Gruppe nach zwei Untergruppen.

Von

L. Fuchs, Budapest.

(Eingelangt am 6. November 1952.)

1. Es sei G eine Gruppe, deren Operation multiplikativ geschrieben ist. Ist H eine Untergruppe von G, so besitzt G bekanntlich eine Zerlegung in elementfremde Linksnebenklassen

$$G = H + aH + bH + \ldots, \tag{1}$$

wo $a, b, \ldots$ Elemente von G sind. Es ist ganz evident, daß eine ebensolche Zerlegung von G nach einer anderen Untergruppe K dann und nur dann eine Verfeinerung[1] der Zerlegung (1) ist, falls $K \subseteq H$ gilt, ferner die Komponenten einer Zerlegung (1) dann und nur dann bezüglich der Komplexmultiplikation eine Gruppe bilden, wenn H Normalteiler von G ist.

Nun kann man in Verbindung mit der Doppelmodulzerlegung[2]

$$G = HK + HaK + HbK + \ldots \tag{2}$$

von G nach den Untergruppen H und K die entsprechenden Fragen stellen:

1) Wann ist die Zerlegung von G nach den Untergruppen (H, L) eine Verfeinerung von der nach (H, K)?

2) Unter welchen Bedingungen bilden die Komponenten in (2) bezüglich der Komplexmultiplikation eine Gruppe?

Diese beiden Fragen, die meines Wissens noch nicht behandelt worden sind, werden in der vorliegenden kurzen Note beantwortet. Die Lösung dieser Fragen ist auch hier nicht schwer.

---

[1] Unter Verfeinerung einer Zerlegung von G in elementfremde Komplexe verstehen wir eine Zerlegung, deren jede Komponente in einem Komplex der originalen Zerlegung enthalten ist.

[2] S. z. B. *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* von *A. Speiser*, 2. Aufl. (Berlin, 1929), S. 62—64.

2. Zuerst ordnen wir zu je zwei Untergruppen H und K einer Gruppe G eine durch das geordnete Untergruppenpaar (H, K) eindeutig bestimmte dritte Untergruppe von G, die im folgenden einfachheitshalber mit $[H; K]$ bezeichnet wird und die sich bei der Behandlung von Doppelmodulzerlegungen brauchbar erweist.

Den Durchschnitt aller Komplexe H^*K, wo $H^* = x^{-1}Hx$ $(x \in G)$ alle verschiedenen, zu H konjugierten Untergruppen von G durchläuft[3], bezeichnen wir mit A. Augensichtlich enthält A die Untergruppe K und besteht aus gewissen Linksnebenklassen nach K. Nun zeigen wir, daß A *stets eine Halbgruppe ist.* Dazu brauchen wir nur zu beweisen, daß aus $a \in A$ und $b \in A$ stets $ab \in A$ folgt. Es genügt offenbar nachzuweisen, daß aus den Voraussetzungen, für jedes Element $c \in G$ die Existenz von Elementen $h \in H$ und $k \in K$ mit $ab = c^{-1}hck$ folgt. Nach $a \in A$ gibt es Elemente $h' \in H$ und $k' \in K$ mit $a = c^{-1}h'ck'$, sowie (nach $b \in A$) Elemente $h'' \in H$ und $k'' \in K$ mit $b = (ck')^{-1}h''(ck')k''$. Dann besitzt

$$ab = c^{-1}h'ck'\,(ck')^{-1}h''(ck')\,k'' = c^{-1}(h'h'')\,c\,(k'k'')$$

die erwähnte Form, mithin gilt $ab \in A$, w.z.b.w.

Da der inverse Komplex A^{-1}, der sich ersichtlich auch als der Durchschnitt aller Komplexe KH^* (H^* durchläuft, wie oben, alle zu H konjugierten Untergruppen von G) definieren läßt, ebenfalls eine Halbgruppe ist, erhalten wir als Ergebnis, daß

$$[H; K] = A \cap A^{-1}$$

eine K enthaltende Untergruppe von G ist. Diese ist die größte in der Halbgruppe A enthaltene Untergruppe von G in dem Sinne, daß sie sämtliche Untergruppen von A enthält. Ist A endlich, dann ist natürlich A selbst eine Gruppe, d. h. $[H; K] = A$. Ob A immer eine Gruppe ist, konnten wir vorläufig noch nicht entscheiden.

Wir bemerken, daß im allgemeinen $[H; K] \neq [K; H]$ gilt. Ferner, wenn H ein Normalteiler in G ist, so muß natürlich $A = A^{-1} = HK$ sein, und somit ist $[H; K] = HK$ das Produkt der Gruppen H und K, während i. a. nur die Inklusion $[H; K] \supseteq NK$ gilt, wo N den größten in H enthaltenen Normalteiler von G bezeichnet.

Es ist leicht zu beweisen, daß für je zwei Untergruppen H und K jeweils

$$[H; [H; K]] = [H; K] \tag{3}$$

[3] H soll ihren Konjugierten zugerechnet werden.

gilt. In der Tat ist die eine Hälfte der Behauptung, nämlich $\supseteq$, klar, während die andere aus der Bemerkung folgt, daß die mittels der Gruppen H und $[H; K]$ gebildete Halbgruppe A aus allen Elementen a besteht, für welche es mit beliebig gewählten $b, c \in G$ eine Darstellung $a = (b^{-1} h' b)(c^{-1} hck)$ mit passenden $h, h' \in H$, $k \in K$ gibt. Wählt man hier $b = c$ und folgert für A^{-1} ähnlicherweise, so ergibt sich unmittelbar das Enthaltensein $\subseteq$.

3. Und nun sind wir in der Lage, uns der Beantwortung der zwei gestellten Fragen zuzuwenden.

Die Doppelmodulzerlegung

$$G = HL + HaL + HbL + \ldots \tag{4}$$

ist genau dann eine Verfeinerung von (2), wenn für jedes $a \in G$

$$HaL \subseteq HaK$$

gilt. Dazu ist aber notwendig und hinreichend, daß für jedes $a \in G$

$$aL \subseteq HaK, \text{ d. h. } L \subseteq a^{-1}HaK$$

gelte. Dies bedeutet, daß L zu jedem Komplex H^*K gehört, folglich erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 1. Damit die Zerlegung (4) *von G nach dem Doppelmodul (H, L) eine Verfeinerung der Zerlegung nach dem Doppelmodul (H, K) sei, ist es notwendig und hinreichend, daß*

$$L \subseteq [H; K] \tag{5}$$

bestehe, oder, was dasselbe bedeutet, daß

$$[H; L] \subseteq [H; K]. \tag{6}$$

Nur die Äquivalenz der Bedingungen (5) und (6) ist noch zu beweisen. Daß (6) das Bestehen von (5) nach sich zieht, ist trivial. Umgekehrt, setzen wir (5) voraus. Dann muß offenbar $[H; L] \subseteq [H; [H; K]]$ sein und die Behauptung ist eine unmittelbare Folge von (3).

Da die Bedingung (6) notwendig und hinreichend ist, folgt:

Zusatz. Die Zerlegungen nach (H, K) und (H, L) fallen genau dann zusammen, wenn

$$[H; K] = [H; L]$$

gilt. Insbesondere ist $[H; K]$ die größte Untergruppe L von G, für welche dies gilt.

4. Um das zweite gestellte Problem zu lösen, ordnen wir jedem Element a von G den a enthaltenden Komplex HaK zu. Bilden nun die Komplexe HaK bezüglich der Komplexmultiplikation eine Gruppe,

so muß diese Zuordnung ein Homomorphismus sein. Daraus folgt nach dem Hauptsatz über Homomorphismen, daß der dem Gruppeneinselement e zugeordnete Komplex $HK = N$ Normalteiler in G ist und die übrigen Komplexe HaK Nebenklassen von N sind, d. h.

(α) $HK = N = KH$ ist ein Normalteiler von G,

(β) $HaK = aN = aHK = KHa$ für jedes $a \in G$.

(α) und (β) zusammen bilden ersichtlich gleichzeitig eine hinreichende Bedingung.

Nun kann Bedingung (β) auch so geschrieben werden:

$$HK = a^{-1} HaK \qquad \text{für jedes } a \in G,$$

mit anderen Worten: alle Komplexe H^*K sind der Gruppe $N = HK$ gleich; somit gilt

$$[H; K] = HK.$$

In analoger Weise schließt man, daß $[K; H] = KH$. Mithin erhält man

$$[H; K] = [K; H] \tag{7}$$

und dies ist wegen (α) ein Normalteiler von G.

Es sei nun umgekehrt (7) gültig und $N = [H; K] = [K; H]$ sei ein Normalteiler von G. Dann enthält die Gruppe N beide Untergruppen H und K, und somit auch die Komplexe HK und KH. Andererseits enthalten diese Komplexe laut Definition die Gruppen $[H; K]$ und $[K; H]$, folglich ist die Gruppe $HK = KH = N$ ein Normalteiler von G, d. h. (α) ist erfüllt. Wegen $H^* \subseteq N$ gilt ferner

$$H^* K \subseteq N = [H; K] \subseteq H^* K,$$

folglich

$$HK = N = H^* K,$$

womit auch (β) bewiesen ist. Hieraus folgt als Ergebnis:

Satz 2. Die Komplexe der Zerlegung von G nach dem Doppelmodul (H, K) bilden genau dann eine Gruppe bezüglich der Komplexmultiplikation, wenn die Gruppen $[H; K]$ und $[K; H]$ mit demselben Normalteiler von G zusammenfallen.

Über ein Problem vom Waring-Goldbach'schen Typ II.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 12. November 1952.)

Im ersten Teil[1] dieser Arbeit wurde gezeigt: Fast alle geraden natürlichen Zahlen lassen sich in der Form

$$n = p_1^2 + p_2^3 + p_3^4 + p_4^5$$

darstellen, wobei p_1, p_2, p_3, p_4 Primzahlen sind. Es soll nun noch folgendes gezeigt werden:

Satz: Jede genügend große ungerade Zahl n läßt sich in folgender Form darstellen

$$n = p_1 + p_2^2 + p_3^3 + p_4^4 + p_5^5 \tag{4}$$

wo die $p_1, \ldots, p_5$ Primzahlen sind.

Zum Beweis sind eine Reihe von Hilfssätzen nötig, die wir voranschicken. Die Bezeichnungen sind dieselben wie in Teil I. Außer den dort eingeführten Funktionen sei noch

$$V_1(\alpha) = \sum_{p \leqq N} e(\alpha p), \quad S_{a,q}^{(1)} = \sum_{l=1,(l,q)=1}^{q} e_q(a l) = \mu(q)$$

$$V_1^*(\alpha, a, q) = \{\varphi(q)\}^{-1} S_{a,q}^{(1)} \sum_{2 \leqq n \leqq N} (\log n)^{-1} e(n\beta).$$

Weiters sei

$$V_1 \ldots V_5(\alpha) = \sum_n r'(n)\, e(n\alpha)$$

$r'(n)$ ist für $n \leqq N$ die Anzahl der Darstellungen von n in der Form (4). Wir setzen

$$A'_q(N) = \{\varphi(q)\}^{-5} \sum_a S_{a,q}^{(1)} \ldots S_{a,q}^{(5)} e_q(-Na)$$

$$S'(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A'_q(n)$$

---

[1] Mh. Math. **57** (1953), zitiert mit I.

Wir teilen $\mathfrak{M}$ in zwei Teile

$$\mathfrak{M}_1 : |\beta| > N^{-1} L^{5h}$$
$$\mathfrak{M}_2 : |\beta| \leqq N^{-1} L^{5h}$$

Lemma 17:

$$(\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}_1} + \sum_{m} \int_{m}) |V_1 \dots V_5(\alpha)| \, d\alpha = O(N^{\mu} L^{-h})$$

Nach Lemma 2 aus I ist auf $\mathfrak{m}$

$$V_5(\alpha) = O(N^{1/5} L^{-h})$$

Nach Lemma 6 und 7[2] aus I ist auf $\mathfrak{M}$,

$$V_5(\alpha) = O(N^{1/5} e^{-c\sqrt{L}} + |\beta|^{-1/5}) = O(N^{1/5} L^{-h}).$$

Daher wird der fragliche Ausdruck gleich

$$O(N^{1/5} L^{-h} \int_0^1 |V_1 \dots V_4(\alpha)| \, d\alpha) =$$

$$= O(N^{1/5} L^{-h} \{\int_0^1 |V_1(\alpha)|^2 \, d\alpha \int_0^1 |V_2 V_3 V_4(\alpha)|^2 \, d\alpha\}^{1/2}.$$

Nach Lemma 3 ist dies

$$= O(N^{\mu} L^{-h}),$$

da ja

$$\int_0^1 |V_1(\alpha)|^2 = \pi(N) = O(NL^{-1}).$$

Lemma 18:

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}_2} |V_1 \dots V_5(\alpha) - V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q)| \, d\alpha = O(N^{\mu} e^{-c\sqrt{L}}).$$

Beweis: Aus der beim Beweis von Lemma 9 gemachten Umformung folgt

$$\sum_{q \leqq Lh_0} \sum_{a} \int_{\mathfrak{M}_2} |V_1 \dots V_5(\alpha) - V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q)| \, d\alpha =$$

$$= O(\sum_{q \leqq Lh_0} q \int_0^{N^{-1} L^{5h}} N^{\mu+1} e^{-c\sqrt{L}} \, d\beta) = O(N^{\mu} e^{-c\sqrt{L}}).$$

Lemma 19:

$$\sum_{\mathfrak{M}} (\int_0^1 - \int_{\mathfrak{M}_2}) |V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q)| \, d\alpha = O(N^{\mu} L^{-h}).$$

Beweis: Nach Lemma 7 ist die obige Summe gleich

$$O(\sum_{q \leqq Lh_0} \varphi(q) \int_{N^{-1} L^{5h}}^{\infty} (q^{-1/2+\varepsilon})^5 |\beta|^{-(\mu+1)} \, d|\beta|) =$$

$$= O(N^{\mu} L^{-5h\mu}) = O(N^{\mu} L^{-h}), \text{ da } 5\mu > 1.$$

[2] Diese gelten auch für $k = 1$. (*Hua* loc cit.).

Lemma 20:

$$r'(N) = S'(N)\,\psi'(N) + O(N^{\mu} L^{-h})$$

wobei

$$c\,N^{\mu} L^{-5} < \psi'(N) < C\,N^{\mu} L^{-5},\ C > c > 0.$$

Beweis: Es ist

$$r'(N) = \int_0^1 V_1 \dots V_5(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha = \sum_{\mathfrak{M}} \left(\int_{\mathfrak{M}_1} + \int_{\mathfrak{M}_2}\right) + \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}}.$$

Nach Lemma 17 ist der erste und dritte Teil $= O(N^{\mu} L^{-h})$ und

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}_2} V_1 \dots V_5(\alpha)\, e(-N\alpha)\, d\alpha = \sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}_2} V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ O\left(\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}_2} | V_1 \dots V_5(\alpha) - V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q) |\, d\alpha\right).$$

Der letzte Term ist $O(N^{\mu} e^{-c\sqrt{L}})$ nach Lemma 18.

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}_2} V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha = \sum_{\mathfrak{M}} \int_0^1 V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ O\left(\sum_{\mathfrak{M}} \left(\int_0^1 - \int_{\mathfrak{M}_2}\right) | V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q) |\, d\alpha\right).$$

Nach Lemma 19 ist also

$$r'(N) = \sum_{\mathfrak{M}} \int_0^1 V_1^* \dots V_5^*(\alpha, a, q)\, e(-N\alpha)\, d\alpha + O(N^{\mu} L^{-h}) =$$

$$= \sum_{q \leqq L^{h_0}} A'_q(N) \int_0^1 \sum_{\substack{n_k = 2 \\ k = 1, 2, \dots, 5}}^{N} e((n_1 + \dots n_5 - N)\beta) \left(\prod_{k=1}^{5} n^{1-1/k} \log n_k\right)^{-1} d\beta +$$

$$+ O(N^{\mu} L^{-h}).$$

Die Behauptung des Lemmas folgt dann wegen

$$\psi'(N) = \sum_{\substack{n_k = 2 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_5 = N}}^{N} \left(\prod_{k=1}^{5} n_k^{1-1/k} \log n_k\right)^{-1}$$

und (wegen $h < h_0$)

$$\sum_{q > L^{h_0}} A'_q(N) = O\left(\sum_{q > L^{h_0}} q\,\{\varphi(q)\}^{-5}\,(q^{1/2+\varepsilon})^4\right) = O(L^{-h_0+\varepsilon}) = O(L^{-h})$$

(nach Lemma 5 aus *I*).

Lemma 21: Wenn N ungerade, so ist

$$S'(N) \geqq c > 0.$$

Beweis: Aus der absoluten Konvergenz der singulären Reihe folgt

$$S'(N) = \prod_p (1 + A'_p(N)).$$

Das Produkt ist analog zu $S_1(n)$ aus I, jedoch ist hier auch $A'_{2^2}(N) = 0$, wegen $\mu(2^2) = 0$. Weiters ist nach I

$$A'_p(N) = -\frac{1}{\varphi(p)} A_p(N) = -\frac{1}{\varphi(p)} \left(\frac{p}{(p-1)^4} M_p - 1 \right)$$

wo M_p die Anzahl der Lösungen von

$$x^2 + y^3 + z^4 + w^5 \equiv N \pmod{p} \quad p \nmid x\,y\,z\,w.$$

Also wird

$$1 + A'_p(N) = \frac{p}{(p-1)^5} ((p-1)^4 - M_p) = 0$$

nur, wenn $p = 2$, $N \equiv 0 \pmod 2$. (Dies folgt aus I Lemma 13). In allen anderen Fällen ist $M_p < (p-1)^4$ und $1 + A'_p(N) > 0$. Nach Lemma 14 aus I ist

$$A'_p(N) = 0\,(p^{-2})$$

und

$$S'(N) > c_1 \prod_{p > c_2} (1 - c_3 p^{-2}) \geqq c > 0.$$

Der Beweis des Satzes ergibt sich nun aus Lemma 20 und 21, wenn $h > 5$ genommen wird.

Wir bemerken noch, daß derselbe Beweisgang zeigt: *Jede genügend große ungerade Zahl n ist in der Form darstellbar*

$$n = p_1 + p_2^2 + p_3^3 + p_4^4 + p_5^k$$

wo $k \geqq 1$ beliebig, ganz und $p_1 \ldots p_5$ Primzahlen bedeuten.

Eine topologische Invariante von sechs Linienelementen zweiter Ordnung eines Punktes der Ebene.

Von

E. Bukovics, Wien.

(Eingelangt am 24. November 1952).

In den letzten Jahrzehnten wurde von verschiedenen Geometern die Einwirkung von Punkttransformationen auf die Umgebungen bestimmter Ordnung eines Paares entsprechender Punkte studiert. Die eine in diesen Problemkreis fallende Fragestellung ist die nach möglichst einfachen Transformationen, die die gegebene bis zu Umgebungen gewisser Ordnung approximieren. Eine Zusammenstellung der in dieser Richtung — insbesondere von *E. Bompiani* und *M. Villa* — erzielten Ergebnisse findet man in [11]. Die Wirkung von Punkttransformationen auf die durch ein Paar entsprechender Punkte hindurchgehenden Linien-, bzw. Flächenelemente gewisser Ordnung (insbesondere geometrisch ausgezeichnete, wie Wende- und Kreiselemente) wurden von *E. Bompiani* untersucht [3], [4]. Eine weitere Frage ist die nach Invarianten von Umgebungen bestimmter Ordnung gegenüber Punkttransformationen. Ein ausführliches Literaturverzeichnis über die darüber veröffentlichten Arbeiten ist in [5] zusammengestellt.

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zum letztgenannten Fragenkreis liefern. *R. Mehmke* hat in [7] eine (unabhängig davon auch von *R. Smith* und *E. Wölffing* gefundene) projektive Invariante zweier ebener, einander berührender Kurven angegeben, nämlich das Verhältnis der beiden Krümmungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ der Kurven:

$$M_1 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}. \tag{1}$$

Weiters fanden *R. Mehmke* [8], [9] und *E. Bompiani* [1], daß drei einander berührende Kurven eine topologische Invariante besitzen, die eine linear gebrochene Funktion der drei Krümmungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ dieser Kurven ist:

$$M_2 = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_3 - \varkappa_1}. \tag{2}$$

Im Folgenden soll der Fall beliebiger (einander nicht notwendig berührender Linienelemente zweiter Ordnung) untersucht werden.

Den Betrachtungen wird die Gruppe der zweimal stetig differenzierbaren Punkttransformationen T einer Ebene E, die einen Punkt 0 derselben festlassen, zugrundegelegt. Untersucht wird die Einwirkung dieser Transformationen auf die Linienelemente zweiter Ordnung des Punktes 0 und die Mindestzahl der Elemente, die Invarianten zweiter Ordnung besitzen, festgestellt. Weiters werden diese Invarianten berechnet und in der Ebene gedeutet.

Betrachtet man an Stelle der Gruppe T die Untergruppen der konformen, bzw. projektiven Transformationen, so lassen sich durch Spezialisierung aus den topologischen Invarianten konforme, bzw. projektive Invarianten gewinnen. Als Spezialfälle ergeben sich die Invarianten (1) und (2).

Die Untersuchungen lassen sich leicht auf die Gruppe der Geradentransformationen einer Ebene, die eine Gerade derselben festlassen, bezüglich der Linienelemente zweiter Ordnung, die diese Gerade berühren, und auf die Gruppe der Berührungstransformationen, die ein Linienelement erster Ordnung der Ebene festlassen, bezüglich der durch dieses hindurchgehenden Linienelemente dritter Ordnung übertragen. Im Folgenden sollen jedoch ausschließlich Punkttransformationen untersucht werden.

I. Die Transformation T sei durch die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben. Der Punkt 0 soll mit dem Ursprung zusammenfallen. Weiters soll in 0 die Funktionaldeterminante von Null verschieden sein. Für die Ableitungen der Funktionen (3) im Nullpunkt werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} x_u &= a_1;\ x_v = a_2;\ x_{uu} = a_{11};\ x_{uv} = a_{12};\ x_{vv} = a_{22} \\ y_u &= b_1;\ y_v = b_2;\ y_{uu} = b_{11};\ y_{uv} = b_{12};\ y_{vv} = b_{22}. \end{aligned} \tag{4}$$

Zur Beschreibung der durch den festen Punkt 0 hindurchgehenden Linienelemente zweiter Ordnung verwendet man zweckmäßig die drei Differentialformen:

$$du = \sigma,\ dv = \tau,\ d^2v\,du - d^2u\,dv = \eta. \tag{5}$$

Bedeuten ds, α und $\varkappa$ Bogenelement, Tangentialwinkel und Krümmung des Linienelementes zweiter Ordnung, so gelten folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\tau}{\sigma} = \tan\alpha,\ \sigma = \cos\alpha\, ds, \\ &ds = \sqrt{\sigma^2+\tau^2},\ \tau = \sin\alpha\, ds, \end{aligned}\right\} \qquad \eta = \varkappa \cdot (\sigma^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{6}$$

Aus (6) folgt, daß σ, τ, η der Äquivalenzrelation

$$(\sigma : \tau : \eta) = (\varrho\sigma : \varrho\tau : \varrho^3\eta) \tag{7}$$

unterliegen, also pseudohomogene Parameter vom Grade drei sind. Eine Möglichkeit, solche Parameter geometrisch zu deuten, hat *H. Mohrmann* in [10] gegeben. Sie werden von ihm zur Beschreibung *Jonquière*'scher Gebiete verwendet und als *Study*'sche Normal-Koordinaten derselben bezeichnet. Diese Deutung — im vorliegenden Falle als Koordinaten eines rationalen Normkegels dritter Ordnung im vierdimensionalen projektiven Raume S_4 — wird sich als sehr zweckmäßig zur Lösung der gestellten Aufgabe erweisen.

Jedem Wertetripel (7) $(\neq 0 : 0 : 0)$ entspricht umkehrbar eindeutig ein Linienelement zweiter Ordnung E_2 durch den Punkt 0, wenn man dem Wertetripel $(0 : 0 : 1)$ den Punkt 0 selbst, aufgefaßt als Linienelement zweiter Ordnung mit unbestimmter Tangentenrichtung, zuordnet. Als geometrisch ausgezeichnete Linienelemente zweiter Ordnung ergeben sich die durch $\eta = 0$ gekennzeichneten Wendeelemente, für die der Krümmungsradius über alle Grenzen wächst.

II. Übt man auf die Linienelemente zweiter Ordnung (7) eine Transformation T aus, so erhält man, wenn die transformierten Elemente durch Striche gekennzeichnet werden, unter Verwendung der Abkürzungen (4) die folgenden Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sigma' &= a_1\sigma + a_2\tau \\ \varrho\tau' &= b_1\sigma + b_2\tau \end{aligned}\right\} \tag{8,1}$$

$$\varrho^3\eta' = H_3(\sigma,\tau) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\eta, \tag{8,2}$$

wobei $H_3(\sigma,\tau)$ eine Form dritten Grades in σ, τ ist:

$$H_3(\sigma,\tau) = A_1\sigma^3 + A_2\sigma^2\tau + A_3\sigma\tau^2 + A_4\tau^3, \tag{9}$$

deren Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 b_{11} - b_1 a_{11} \\ A_2 &= 2(a_1 b_{12} - b_1 a_{12}) + a_2 b_{11} - b_2 a_{11} \\ A_3 &= 2(a_2 b_{12} - b_2 a_{12}) + a_1 b_{22} - b_1 a_{22} \\ A_4 &= a_2 b_{22} - b_2 a_{22} \end{aligned} \tag{10}$$

gegeben sind.

Durch die Formeln (8,1) ist die Transformation der Linienelemente erster Ordnung bestimmt, die bekanntlich durch die Transformation T projektiv untereinander vertauscht werden. Für die Linienelemente zweiter Ordnung tritt dann noch die Formel (8,2) hinzu. Für $H_3(\sigma,\tau)=0$ erhält man diejenigen Richtungen, deren Wendeelemente wieder in solche transformiert werden, die zuerst von *O. Borůvka* untersuchten charakteristischen Richtungen.

Die Transformationen (8) bilden eine achtgliedrige Gruppe von Automorphien der *Jonquière*'schen Gebiete, die durch die Parameter $(\varrho\sigma:\varrho\tau:\varrho^3\eta)$ beschrieben werden. Diese Tatsache wird es nun ermöglichen, durch die Deutung dieser Transformationen im vierdimensionalen Raume die gesuchten Invarianten zu bestimmen.

III. Von den pseudohomogenen Parametern $(\varrho\sigma:\varrho\tau:\varrho^3\eta)$ gelangt man zu homogenen, indem man alle Produkte von σ und τ vom Grade drei zusammen mit η als homogene Koordinaten eines vierdimensionalen projektiven Raumes S_4:

$$X_0=\eta,\ X_1=\sigma^3,\ X_2=\sigma^2\tau,\ X_3=\sigma\tau^2,\ X_4=\tau^3 \qquad (11)$$

deutet. (11) stellt dann in diesem S_4 die Parameterdarstellung eines rationalen Normkegels dritter Ordnung dar, der durch Projektion der — der Hyperebene $X_0=0$ des S_4 angehörenden — rationalen Normkurve dritter Ordnung

$$X_0=0,\ X_1=\sigma^3,\ X_2=\sigma^2\tau,\ X_3=\sigma\tau^2,\ X_4=\tau^3 \qquad (12)$$

aus dem Punkte $(1:0:0:0:0)$ entsteht. Die Erzeugenden des Kegels sind durch die Verhältnisse $\sigma:\tau$ festgelegt und vereinigen alle Punkte, die Linienelementen zweiter Ordnung im festen Linienelement erster Ordnung zugehören. Allen Erzeugenden gehört die Spitze, die den Parameterwerten $\sigma=0$, $\tau=0$, $\eta=1$, also dem Punkte 0 entspricht, an. Die Wendeelemente $\eta=0$ entsprechen den Punkten der Normkurve (12).

Die Transformationen (8) stellen die Automorphien des Kegels dar. Auf den S_4 ausgedehnt, erhält man daraus die zugehörigen automorphen Kollineationen H, die eine achtgliedrige Untergruppe der allgemeinen Kollineationsgruppe des S_4 bilden. Die analytischen Formeln für H ergeben sich durch Einsetzen von (8) in

$$\varrho^3X_0'=\varrho^3\eta',\ \varrho^3X_1'=\varrho^3\sigma'^3,\ \varrho^3X_2'=\varrho^3\sigma'^2\tau',\ \varrho^3X_3'=\varrho^3\sigma'\tau'^2,\ \varrho^3X_4'=\varrho^3\tau'^3 \qquad (13)$$

und lauten, wie man auch aus der Arbeit [10] entnehmen kann, folgendermaßen:

$$\varrho^3 X_i' = \sum_{k=0}^{4} a_{ik} X_k \text{ mit } \begin{cases} a_{00} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_{j0} = 0,\ j = 1, 2, 3, 4 \\ a_{0k} = A_k,\ k = 1, 2, 3, 4 \\ a_{ik} = \dfrac{1}{(k-1)!} \left(a_2 \dfrac{\partial}{\partial a_1} + b_2 \dfrac{\partial}{\partial b_1} \right)^{k-1} a_1^{4-i} b_1^{i-1} \\ \qquad\qquad \text{für } i \neq 0,\ k \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Die Determinante von H ist $D = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^7 \neq 0$, daher ist H regulär.

Die Transformation H kann man sich durch Zusammensetzung zweier Kollineationen A und Z entstanden denken, die man erhält, wenn man zunächst nur die Formeln (8,1) ins Auge faßt und dann die aus (8,2) durch Ersetzen von σ, τ durch σ', τ' nach (8,1) entstehenden Formeln.

Die Kollineationen A vertauschen die Erzeugenden des Kegels und lassen die Kegelspitze und die Hyperebene $X_0 = 0$ fest, sind also Affinitäten.

Die Kollineationen Z hingegen lassen die Kegelspitze fest und führen alle durch diese hindurchgehenden Geraden in sich über, sind also Zentralkollineationen.

Die Kollineationen A sind durch die Zuordnung von drei Paaren von Linienelementen erster Ordnung $\sigma : \tau$ gegeben. Zur Bestimmung der Kollineationen Z muß die Zuordnung von fünf Paaren entsprechender Punkte, die jeweils auf dem gleichen Kollineationsstrahle liegen, bekannt sein. Daraus folgt:

1. Zur Bestimmung der Kollineationen H, bzw. der Transformationen (8) kann man die Zuordnung von drei Paaren von nicht ausgearteten Linienelementen zweiter Ordnung mit verschiedener Tangentenrichtung beliebig vorgeben. Dadurch ist die Transformation der Linienelemente erster Ordnung vollständig bestimmt. Durch die Vorgabe zweier weiterer Paare von Linienelementen zweiter Ordnung, deren Linienelemente erster Ordnung sich in der nunmehr schon vorgeschriebenen Weise transformieren, sind dann die Transformation (8), bzw. die Kollineation H eindeutig bestimmt.

2. Die Mindestzahl von Linienelementen erster Ordnung durch 0, die gegenüber den Transformationen (8) und damit auch gegenüber den

Transformationen T Invarianten besitzen, ist vier. Und zwar gibt es bekanntlich eine wesentliche Invariante, nämlich das Doppelverhältnis dieser vier Elemente:

$$\Delta(1\,2\,3\,4) = \frac{\sigma_1\tau_3 - \sigma_3\tau_1}{\sigma_2\tau_3 - \sigma_3\tau_2} : \frac{\sigma_1\tau_4 - \sigma_4\tau_1}{\sigma_2\tau_4 - \sigma_4\tau_2}. \tag{15}$$

3. *Die Mindestzahl von Linienelementen zweiter Ordnung durch* 0, *die gegenüber den Transformationen* (8) *und damit auch gegenüber den Transformationen T Invarianten zweiter Ordnung besitzen, ist sechs. Und zwar gibt es genau eine wesentliche Invariante zweiter Ordnung, die die Zuordnung eines sechsten Paares von Linienelementen zweiter Ordnung mit vorgeschriebenen Linienelementen erster Ordnung bestimmt.*

IV. Um nun diese wesentliche Invariante zweiter Ordnung zu gewinnen, kann man von den allgemeinen Kollineationen des S_4 ausgehen. Die Mindestzahl von Punkten im S_4, die projektive Invarianten besitzen, ist sieben. Und zwar haben sieben Punkte P_i $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ fünf wesentliche Invarianten X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, die sich als Koordinaten des Punktes P_6 in einem durch $P_0, \ldots, P_5$ bestimmten projektiven Koordinatensystem erweisen. Ihr analytischer Ausdruck ist, wenn $(i_1\,i_2\,i_3\,i_4\,i_5)$ die Determinante bedeutet, deren Spalten die projektiven Koordinaten der Punkte $P_{i1} \ldots P_{i5}$ sind, durch

$$X_0 = \frac{(1\,2\,3\,4\,6)}{(1\,2\,3\,4\,5)} \tag{16,1}$$

$$X_1 = \frac{(0\,2\,3\,4\,6)}{(0\,2\,3\,4\,5)},\ X_2 = \frac{(0\,1\,3\,4\,6)}{(0\,1\,3\,4\,5)},\ X_3 = \frac{(0\,1\,2\,4\,6)}{(0\,1\,2\,4\,5)},\ X_4 = \frac{(0\,1\,2\,3\,6)}{(0\,1\,2\,3\,5)} \tag{16,2}$$

gegeben. Von diesem relativen Invarianten gelangt man durch Quotientenbildung zu absoluten. Von diesen sind vier wesentlich. Unter der Voraussetzung $X_0 \neq 0$ kann man etwa die folgenden auswählen:

$$D_i = \frac{X_i}{X_0}. \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{17}$$

Unter den allgemeinen Kollineationen des S_4 sind nun die automorphen Kollineationen H dadurch gekennzeichnet, daß sie die Kegelspitze $(1:0:0:0:0)$ festlassen und den Kegel in sich überführen.

Man kann also etwa für den Punkt P_0 die Kegelspitze nehmen und findet — in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Abschnittes III, daß bereits sechs Punkte (zusammen mit der Kegelspitze) Invarianten gegenüber den automorphen Kollineationen H besitzen. Bedeutet

$(i_1\, i_2\, i_3\, i_4)$ die Determinante, deren Spalten aus den vier letzten Koordinaten der Punkte $P_{i1} \ldots P_{i4}$ gebildet werden, dann gilt:

$$X_1 = \frac{(2\,3\,4\,6)}{(2\,3\,4\,5)},\ X_2 = \frac{(1\,3\,4\,6)}{(1\,3\,4\,5)},\ X_3 = \frac{(1\,2\,4\,6)}{(1\,2\,4\,5)},\ X_4 = \frac{(1\,2\,3\,6)}{(1\,2\,3\,5)}, \tag{18}$$

während X_0 unverändert bleibt. Für die Bildung der Größen $X_1 \ldots X_4$ spielt also die Koordinate mit dem Index 0 keine Rolle. Wählt man sie für die Punkte $P_1 \ldots P_6$ Null, so sind $X_1 \ldots X_4$ gerade die vier relativen Invarianten, die die Bildpunkte von $P_1 \ldots P_6$ gegenüber den allgemeinen Kollineationen der Hyperebene $X_0 = 0$ besitzen. Die zugehörigen absoluten Invarianten sind (unter der Voraussetzung $X_1 \neq 0$) etwa durch

$$d_i = \frac{X_i}{X_1} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{19}$$

gegeben. Es sind natürlich nur d_2, d_3, d_4 wesentlich, während $d_1 = 1$ gilt. Diese Schreibweise wurde nur gewählt, weil dann die folgenden Formeln übersichtlicher werden.

Um zu einer geometrischen Deutung der Invarianten D_i zu gelangen, kann man die symmetrische Funktion

$$D^* = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2} \tag{20}$$

bilden, aus der sich die Invarianten D_i nach folgenden Formeln ergeben:

$$D_i = D^* \cdot r_i$$
$$r_i = \frac{X_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{4} X_k^2}} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{21}$$

Übt man nun eine projektive Transformation des Koordinatensystems aus, die den Punkt P_0 festläßt und die Punkte $P_1 \ldots P_4$ in die Fernpunkte zueinander orthogonaler Richtungen und den Punkt P_5 in einen eigentlichen Punkt der Symmetriegeraden dieser Richtungen verlegt, dann stellt D^* den Abstand des aus P_6 hervorgegangenen Punktes vom Punkte P_0 dar, während sich die r_i als die Richtungscosinus' dieses Punktes mit den Koordinatenachsen erweisen. Bezeichnet man die zugehörigen Winkel mit γ_i, so wird

$$r_i = \cos \gamma_i \tag{22}$$

und die D_i sind die rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten des aus P_6 hervorgehenden Punktes.

Diese Auffassung erweist sich als besonders zweckmäßig im Falle der automorphen Kollineationen H, wo die r_i nach (19) und (21) durch

$$r_i = \frac{d_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{4} d_k^2}} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{23}$$

gegeben sind, also Funktionen der projektiven Invarianten der Hyperebene $X_0 = 0$ sind.

Von den Invarianten gegenüber den Kollineationen H gelangt man zu solchen gegenüber den Transformationen T, wenn man die Punkte P_i als Kegelpunkte wählt, also

$$P_i = (\eta_i, \sigma_i^3, \sigma_i^2 \tau_i, \sigma_i \tau_i^2, \tau_i^3) \tag{24}$$

setzt. Man erhält zunächst durch Einsetzen in (16,1):

$$X_0 = \frac{\Sigma \eta_1 (2\,3\,4\,6)}{\Sigma \eta_1 (2\,3\,4\,5)}, \tag{25}$$

bzw., wenn man nach (6) wieder auf Bogenelement, Tangentenwinkel und Krümmung zurückgeht:

$$X_0 = \frac{\Sigma \varkappa_1 [2\,3\,4\,6]}{\Sigma \varkappa_1 [2\,3\,4\,5]} \cdot \frac{ds_6^3}{ds_5^3}, \tag{26}$$

wobei jeweils über alle zyklischen Vertauschungen von 1 2 3 4 6 bzw. 1 2 3 4 5 zu summieren und

$$\begin{aligned} [1\,2\,3\,4] &= \prod_{\substack{n=2,3,4 \\ m<n}} \sin(\alpha_n - \alpha_m), \\ (1\,2\,3\,4) &= [1\,2\,3\,4] \prod_{\substack{n=2,3,4 \\ m<n}} ds_m\, ds_n \end{aligned} \tag{27}$$

zu setzen ist, woraus man $(i\,j\,k\,l)$, bzw. $[i\,j\,k\,l]$ durch zyklische Vertauschung gewinnen kann. Weiters ergibt sich durch Einsetzen in (18):

$$X_i = \left(\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{4} \frac{\sin(\alpha_6 - \alpha_m)}{\sin(\alpha_5 - \alpha_m)} \right) \frac{d\, s_6^3}{d\, s_5^3} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{28}$$

und daraus nach (17) und (20):

$$D^* = \frac{\Sigma \varkappa_1 [2\,3\,4\,5]}{\Sigma \varkappa_1 [2\,3\,4\,6]} \prod_{j=1}^{4} \frac{\sin(\alpha_6 - \alpha_j)}{\sin(\alpha_5 - \alpha_j)} \sqrt{\sum_{l=1}^{4} \left[\frac{\sin(\alpha_5 - \alpha_l)}{\sin(\alpha_6 - \alpha_l)} \right]^2} \tag{29}$$

Aus (15), (21) und (28) folgt:

$$d_i = \Delta(5, 6, i+1, 1). \tag{30}$$

Gegenüber den Transformationen T sind also die d_i bereits Invarianten erster Ordnung, damit auch die r_i, für die man durch Einsetzen von (28) in (21) findet:

$$r_i = \frac{\sin(\alpha_5 - \alpha_i)}{\sin(\alpha_6 - \alpha_i)} : \sqrt{\sum_{l=1}^{4} \left[\frac{\sin(\alpha_5 - \alpha_l)}{\sin(\alpha_6 - \alpha_l)}\right]^2}. \tag{31}$$

Aus (21) ergibt sich nun unter Benützung von (29) und (31):

$$D_i = D^* \cdot r_i = \frac{\Sigma \varkappa_1 [2\,3\,4\,5]}{\Sigma \varkappa_1 [2\,3\,4\,6]} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \frac{\sin(\alpha_6 - \alpha_j)}{\sin(\alpha_5 - \alpha_j)}. \tag{32}$$

Damit ist ein vollständiger Überblick über die Invarianten zweiter Ordnung gegenüber den Transformationen T gewonnen: *Sechs Linienelemente zweiter Ordnung besitzen vier Invarianten zweiter Ordnung D_i, die sich durch eine Invariante zweiter Ordnung D^* und vier voneinander abhängige Invarianten erster Ordnung r_i darstellen lassen.*

Besonders übersichtlich werden die Formeln, wenn man die sechs Linienelemente zweiter Ordnung einer solchen Transformation der Gruppe unterwirft, daß die vier ersten Elemente Wendeelemente werden, während das fünfte und sechste die Koordinatenachsen berühren, also:

$$\begin{aligned} &\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0 \\ &\sigma_5 : \tau_5 = 1 : 0, \quad \sigma_6 : \tau_6 = 0 : 1 \end{aligned} \tag{33}$$

gilt. Dann ergeben sich folgende Formeln für die Invarianten:

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{\varkappa_5}{\varkappa_6} \sqrt{\sum_{k=1}^{4} \tan^2 \alpha_k} \cdot \prod_{l=1}^{4} \cot \alpha_l \\ r_i &= \frac{\tan \alpha_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{4} \tan^2 \alpha_k}} \qquad D_i = \frac{\varkappa_5}{\varkappa_6} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \cot \alpha_j. \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{34}$$

Bemerkt sei noch, daß man aus Formel (29) durch Spezialisierung die von *R. Mehmke* und *E. Bompiani* angegebene Invariante (2) von drei einander berührenden Kurven erhalten kann, indem man $\alpha_1 = \alpha_5 = \alpha_6$ setzt. Auf dem rationalen Normkegel dritter Ordnung kann diese Invariante als das Doppelverhältnis der Kegelspitze und der Bildpunkte der drei Linienelemente zweiter Ordnung gedeutet werden.

Aus den in diesem Abschnitt berechneten Invarianten gegenüber den Transformationen T kann man, wie in den nächsten beiden Ab-

schnitten gezeigt werden wird, Invarianten gegenüber bis zu Umgebungen erster Ordnung konformen, bzw. gegenüber projektiven Transformationen gewinnen.

V. Für bis zu Umgebungen erster Ordnung konforme Transformationen lauten die Transformationsformeln für die Linienelemente zweiter Ordnung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \varrho\,\sigma' &= \varepsilon\,(a\,\sigma - b\,\tau) \\ \varrho\,\tau' &= \quad b\,\sigma + a\,\tau \\ \varrho^3\eta' &= (A_1\,\sigma + A_4\,\tau)\,(\sigma^2 + \tau^2) + \varepsilon\,(a^2 + b^2)\,\eta, \end{aligned} \tag{35}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ gesetzt werden kann. Diese Transformationen bilden eine viergliedrige Untergruppe der Transformationen (8). Für $\varepsilon = +1$ erhält man die Untergruppe der eigentlich-konformen Transformationen, bei denen das Tangentenbüschel durch 0 eine Drehung erfährt, während für $\varepsilon = -1$ noch eine Umlegung dazu kommt. Es stellt keine wesentliche Einschränkung dar, wenn man sich auf den Fall der eigentlich-konformen Transformationen beschränkt, es ergeben sich im allgemeinen Fall auf Grund analoger Überlegungen dieselben Invarianten.

Die eigentlich konformen Transformationen lassen, wie man durch Einsetzen in (35) nachprüfen kann, die Wendeelemente

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \quad i, \quad \tau_3 = 1, \quad \eta_3 = 0 \\ \sigma_4 &= -i, \quad \tau_4 = 1, \quad \eta_4 = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

ungeändert, daher sind die diesen entsprechenden Punkte im S_4 Fixpunkte der zugehörigen automorphen Kollineationen H. Man kann also zur Bildung der Invarianten außer der Kegelspitze noch diese beiden Fixpunkte (etwa als Punkt P_3 und P_4) heranziehen. Daraus folgt: *Gegenüber bis zu Umgebungen erster Ordnung eines Punktes* 0 *eigentlich-konformen Transformationen besitzen bereits vier Linienelemente zweiter Ordnung durch den Punkt* 0 *Invarianten zweiter Ordnung.*

Durch Einsetzen von (36) in (25) und (18) findet man für D^*:

$$D^* = \frac{\Sigma\,\varkappa_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_6)}{\Sigma\,\varkappa_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_5)} \cdot \frac{\sin(\alpha_6 - \alpha_2)\sin(\alpha_6 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_5 - \alpha_2)\sin(\alpha_5 - \alpha_1)} \cdot \sqrt{B} \tag{37}$$

$$B = \left[\frac{\sin(\alpha_6 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_5 - \alpha_1)}\right]^2 + \left[\frac{\sin(\alpha_6 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_5 - \alpha_2)}\right]^2 + 2\cos^2(\alpha_6 - \alpha_5) - 2\sin^2(\alpha_6 - \alpha_5), \tag{38}$$

wobei in (37) über alle zyklischen Vertauschungen von 126, bzw. 125 zu summieren ist.

VI. Für projektive Transformationen erhält man als Transformationsformeln für die Linienelemente zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \varrho\ \sigma' &= a_1\,\sigma + a_2\,\tau \\ \varrho\ \tau' &= b_1\,\sigma + b_2\,\tau \\ \varrho^3\,\eta' &= (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\eta. \end{aligned} \tag{39}$$

Daraus erkennt man, daß Wendeelemente wieder in Wendeelemente übergeführt werden. Die zugehörigen automorphen Kollineationen H sind Affinitäten.

Aus den allgemeinen Invarianten (32) findet man projektive, indem man vier Elemente als Wendeelemente wählt:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0. \tag{40}$$

Man findet dann z. B.:

$$D_1 = \frac{\varkappa_5}{\varkappa_6} \cdot \frac{\sin(\alpha_6 - \alpha_2)\ .\ \sin(\alpha_6 - \alpha_3)\ .\ \sin(\alpha_6 - \alpha_4)}{\sin(\alpha_5 - \alpha_2)\ .\ \sin(\alpha_5 - \alpha_3)\ .\ \sin(\alpha_5 - \alpha_4)}. \tag{41}$$

Diese Invariante wird also von zwei Linienelementen zweiter Ordnung und drei Linienelementen erster Ordnung des Punktes 0 *gebildet.* Läßt man die drei Linienelemente erster Ordnung zusammenfallen:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4, \tag{42}$$

so erhält man

$$D_1 = \frac{\varkappa_5}{\varkappa_6} \cdot \frac{\sin^3(\alpha_6 - \alpha_2)}{\sin^3(\alpha_5 - \alpha_2)}, \tag{43}$$

also eine projektive Invariante zweier Linienelemente zweiter Ordnung und eines Linienelementes erster Ordnung durch den Punkt 0. Diese Invariante wurde bereits von *E. Bompiani* [2] angegeben. Sie gestattet eine einfache Deutung sowohl auf dem rationalen Normkegel dritter Ordnung als auch in der Ebene. Betrachtet man nämlich das Büschel von Hyperebenen, das im Fernpunkt der dem Linienelement erster Ordnung zugehörigen Erzeugenden den Kegel dreipunktig berührt, dann stellt diese Invariante das Teilverhältnis der Schnittpunkte der durch den Punkt 0 und die Bildpunkte der beiden Linienelemente zweiter Ordnung gehenden Hyperebenen dieses Büschels mit der Erzeugenden $X_0 = 1, X_i = \mu\ (i = 1, 2, 3, 4)$ dar. In der Ebene läßt sich die Invariante aus einer von *L. Geisenheimer* [6] angegebenen Beziehung zwischen den Krümmungsradien von Linienelementen zweiter Ordnung, die einander in einer perspektiven Kollineation entsprechen, gewinnen.

Schließlich kann man aus (43) durch weitere Spezialisierung auch noch die *Mehmke*'sche Invariante (1) gewinnen, indem man annimmt, daß die beiden Linienelemente zweiter Ordnung gleiche Tangentenrichtung $\alpha_5 = \alpha_6$ besitzen. Diese *Mehmke*'sche Invariante kann als Teilverhältnis der drei auf einer Erzeugenden des rationalen Normkegels liegenden Bildpunkte von 0 und der beiden Linienelemente zweiter Ordnung gedeutet werden.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Prof. Dr. *R. Inzinger* für viele Anregungen zu dieser Arbeit sehr herzlich danken.

Literatur.

[1] *E. Bompiani:* „Sulle transformazioni puntuali e di contatto nel piano". Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sc. fis. mat. natur., VI. Ser., **4** (1926).

[2] *E. Bompiani:* „Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei". Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. fis. mat. natur., VI. Ser. **22** (1935).

[3] *E. Bompiani:* „Caratteri differenziali della trasformazione conforme". Rend. Mat. e Appl., V. Ser., **3** (1942).

[4] *E. Bompiani:* „Geometria proiettiva di elementi differenziali". Ann. Mat. pura appl., IV. Ser., **22** (1943).

[5] *E. Bortolotti:* „Über die Invarianten von Linienelementen und die projektive Geometrie der Kurvengewebe". Monatsh. Math. **50** (1942).

[6] *L. Geisenheimer:* „Beziehung zwischen den Krümmungsradien collinearer Curven". Z. Math. Phys. **25** (1880).

[7] *R. Mehmke:* „Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Kurven und Flächen beziehen". Z. Math. Phys. **36** (1891).

[8] *R. Mehmke:* „Über die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven und ihre Änderung bei beliebiger Transformation der Fläche" Z. Math. Phys. **37** (1892).

[9] *R. Mehmke:* „Untersuchungen über die auf die Krümmung von Kurven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen". Erste Mitteilung. Z. Math. Phys. **38** (1893).

[10] *H. Mohrmann:* „Über die automorphe Collineationsgruppe des rationalen Normkegels n. Ordnung". Rend. Circ. Mat. Palermo, **31** (1911).

[11] *M. Villa:* „Alcuni risultati e problemi sulle trasformazioni puntuali". Atti III Congr. Un. Mat. Ital. Pisa (1948).

Flächenläufige Bewegungsvorgänge im elliptischen Raum II.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 13. Dezember 1952.)

Bei einem geschlossenen zweigliedrigen Bewegungsvorgang beschreibt ein im Gangraum befestigter Punkt eine geschlossene Bahnfläche, die ein Raumstück begrenzt. Wir stellen uns die Aufgabe, den Inhalt (Volumen) dieses Raumstückes unter Zugrundelegung einer elliptischen Maßbestimmung zu berechnen. Für den euklidischen Raum wurde die entsprechende Formel von *W. Blaschke* aufgestellt und ihre Herleitung mit Hilfe des *Cartan*schen Kalküls der alternierenden Differentialformen und äußeren Ableitungen übersichtlich gestaltet[1].

Es erscheint für das Folgende zweckmäßig, das Bezugstetraeder $\{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3\}$ starr mit dem Gangraum zu verbinden[2]. Es hängt dann durch eine eigentlich orthogonale Transformation mit konstanten Koeffizienten mit dem Gangtetraeder $\{\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3\}$, das den Gangraum repräsentiert, zusammen. Daher verschwinden die *Pfaff*schen Formen α_i und β_i im System (I, 1) der Ableitungsgleichungen unseres Bewegungsvorganges. Im Folgenden wollen wir zwecks Vereinfachung der Schreibweise das Zeichen * weglassen und statt $\delta..$ das übliche $d..$ setzen.

Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{X}$ des Gangraumes kann mit festen Zeigern x_i auf das Bezugstetraeder bezogen werden. Es gilt dann

$$\mathfrak{X} = x_0 \mathfrak{P}_0 + x_1 \mathfrak{P}_1 + x_2 \mathfrak{P}_2 + x_3 \mathfrak{P}_3 \tag{1}$$

mit der Normierungsbedingung

---

[1] *W. Blaschke*, Über Integrale in der Kinematik. Arch. Math. **1** (1948) 19—22.

[2] Vgl. *H. R. Müller*, Flächenläufige Bewegungsvorgänge im elliptischen Raum. I. Monatsh. f. Math. **57** (1953), 29—43. Hierauf werde im Folgenden unter (I) verwiesen.

$$(\mathfrak{X}\,\mathfrak{X}) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 1. \tag{2}$$

Zufolge der Ableitungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_0 &= \quad + \alpha_1\,\mathfrak{P}_1 + \alpha_2\,\mathfrak{P}_2 + \alpha_3\,\mathfrak{P}_3,\\ d\,\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1\,\mathfrak{P}_0 \quad + \beta_3\,\mathfrak{P}_2 - \beta_2\,\mathfrak{P}_3,\\ d\,\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2\,\mathfrak{P}_0 - \beta_3\,\mathfrak{P}_1 \quad + \beta_1\,\mathfrak{P}_3,\\ d\,\mathfrak{P}_3 &= -\alpha_3\,\mathfrak{P}_0 + \beta_2\,\mathfrak{P}_1 - \beta_1\,\mathfrak{P}_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

finden wir daraus

$$\begin{aligned} d\mathfrak{X} = &-(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\,\mathfrak{P}_0 + (\alpha_1 x_0 - \beta_3 x_2 + \beta_2 x_3)\,\mathfrak{P}_1 + \\ &+ (\alpha_2 x_0 + \beta_3 x_1 - \beta_1 x_3)\,\mathfrak{P}_2 + (\alpha_3 x_0 - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2)\,\mathfrak{P}_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir betrachten nur solche geschlossene, flächenläufige Bewegungsvorgänge, denen im Phasenraum (Parameterraum) orientierbare geschlossene Flächen vom Zusammenhang der Kugel entsprechen. Gemäß den drei Dimensionen des Phasenraums seien die auftretenden Funktionen und *Pfaff*schen Formen von drei Veränderlichen u, v, w abhängig, gehen wir also von einem dreigliedrigen Bewegungsvorgang aus. — Ein Gebiet G dieses Phasenraums möge nun von der orientierbaren geschlossenen Fläche $R = R(G)$ berandet werden. Der zugehörige geschlossene, flächenläufige Bewegungsvorgang erscheint dann in den dreigliedrigen Bewegungsvorgang eingebettet.

Nach der Formel

$$\int_G d\omega = \int_{R(G)} \omega, \tag{5}$$

die die Formeln von *Gauß*, *Green* und *Stokes* zusammenfaßt, kann die Umwandlung eines Volumsintegral in ein Randintegral erfolgen. Hiebei ist ω eine dreistufige Differentialform.

Der im Gangraum befestigte Punkt $\mathfrak{X}$ beschreibt bei dem dreigliedrigen Bewegungsvorgang, der dem Gebiet G des Phasenraums entspricht, ein Raumstück vom Volumen[3]

$$V = \int_G \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w}, \mathfrak{X}\right) du\, dv\, dw.$$

Wir wollen hierin das Produkt der Differentiale $du\,.\,dv\,.\,dw$ als alternierend ansehen, was wir deutlicher durch $[du\,.\,dv\,.\,dw]$ ausdrücken. Dann können wir wegen

[3] *R. Garnier*, Cours de Cinématique, III (Géométrie et Cinématique Cayleyennes), Paris-Gauthier-Villars (1951), S. 332.

Die Klammer ist Symbol für die betreffende Determinante.

$$d\mathfrak{X} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w}\, dw$$

auch schreiben

$$V = \frac{1}{6} \int_G [(d\mathfrak{X},\, d\mathfrak{X},\, d\mathfrak{X},\, \mathfrak{X})]. \tag{6}$$

Nun setzen wir (4) ein und finden schließlich durch Umformung

$$V = -\int_G \{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] x_0^2 + \Sigma [\alpha_i \beta_j \beta_k] x_i^2 + x_0 \Sigma ([\alpha_k \alpha_i \beta_k] - [\alpha_i \alpha_j \beta_j])\, x_i + \Sigma ([\alpha_i \beta_k \beta_i] + [\alpha_j \beta_j \beta_k])\, x_i x_j\}. \tag{7}$$

Hierin ist die Summenbildung jeweils über die drei zyklischen Anordnungen $i, j, k = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2$ vorzunehmen.

Mit Hilfe der Integrierbarkeitsbedingungen (vgl. (I, 10))

$$d\alpha_i = -[\alpha_j \beta_k] - [\beta_j \alpha_k],$$
$$d\beta_i = -[\alpha_j \alpha_k] - [\beta_j \beta_k]$$

und der Regel für die Bildung der äußeren Ableitung eines Produktes linearer Differentialformen, nämlich

$$d[\omega \,.\, \varphi] = [d\omega \,.\, \varphi] - [\omega \,.\, d\varphi]$$

stellen wir nun die Koeffizienten des in den x quadratischen Integranden von (7) als äußere Differentiale zweistufiger Formen dar. Dies ist möglich, da obige Koeffizienten totale Differentialformen sind. Wir finden für $i, j, k = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2$

$$\left.\begin{aligned} [\alpha_i \beta_j \beta_k] &= [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] - \tfrac{1}{2}\{d[\alpha_j \beta_j] + d[\alpha_k \beta_k]\}, \\ [\alpha_k \alpha_i \beta_k] - [\alpha_i \alpha_j \beta_j] &= d[\alpha_j \alpha_k], \\ [\alpha_i \beta_k \beta_i] + [\alpha_j \beta_j \beta_k] &= d[\alpha_i \beta_j]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hiemit erhalten wir aus (7)

$$V = -\int_G [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] + \tfrac{1}{2} \Sigma x_i^2 \{\int_G d[\alpha_j \beta_j] + \int_G d[\alpha_k \beta_k]\} - \Sigma x_i x_j \int_G d[\alpha_i \beta_j] - x_0 \Sigma x_i \int_G d[\alpha_j \alpha_k],$$

wobei die Summationen wiederum über die drei zyklischen Anordnungen der Zeiger zu erstrecken sind.

Die Ecke $\mathfrak{P}_0$ des Bezugstetraeders beschreibt bei dem dreigliedrigen Bewegungsvorgang, der dem Gebiet G des Phasenraums entspricht, ein Gebiet des Rastraumes vom Volumen

$$V_0 = -\int_G [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3].$$

Es wird von jener orientierbaren geschlossenen Fläche berandet, die $\mathfrak{P}_0$ bei dem $R(G)$ entsprechenden flächenläufigen Bewegungsvorgang durchläuft.

Somit gilt, wenn wir die übrigen Gebietsintegrale nach (5) in Randintegrale verwandeln,

$$V = V_0 + \tfrac{1}{2}\Sigma x_i^2\{\int_R [\alpha_j \beta_j] + \int_R [\alpha_k \beta_k]\} - \Sigma x_i x_j \int_R [\alpha_i \beta_j] - \\ - x_0 \Sigma x_i \int_R [\alpha_j \alpha_k].$$

Die auftretenden Integrale und somit auch V hängen nur mehr von $R(G)$, also von dem zugehörigen geschlossenen, flächenläufigen Bewegungsvorgang ab. — Setzen wir noch

$$a_{ij} = a_{ji} = \tfrac{1}{2}\int_R [\alpha_i \beta_j] = \tfrac{1}{2}\int_R [\alpha_j \beta_i],\ b_i = \int_R [\alpha_j \alpha_k],$$

so ergibt sich nach Umordnung obiger Summen auch

$$V = V_0 - x_0 \sum_{i=1}^{3} b_i x_i - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + (a_{11} + a_{22} + a_{33})(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Mit Hilfe der Normierungsbedingung (2) läßt sich dieser Ausdruck homogenisieren:

$$(V_0 - V)\sum_{i=0}^{3} x_i^2 - x_0 \sum_{i=1}^{3} b_i x_i - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + (a_{11}+a_{22}+a_{33})(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = 0.$$

Daraus entnimmt man aber, daß alle Punkte $\mathfrak{X}$ des Gangraumes, die zum gleichen Rauminhalt V der berandenden Bahnfläche führen, auf einer Quadrik liegen. Wird nun als Bezugstetraeder das Hauptachsentetraeder dieser Quadrik gewählt, d. h. also das gemeinsame Polartetraeder dieser Quadrik und des absoluten Gebildes unserer elliptischen Metrik, so hat dies

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \text{ und } b_i = 0$$

zu Folge. Nach dieser besonderen Wahl des Bezugstetraeders kann also, falls noch

$$A_i = a_{jj} + a_{kk}$$

gesetzt wird, kurz geschrieben werden

$$V = V_0 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 \tag{9}$$

oder auch

$$(V_0 - V)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2) = 0. \tag{10}$$

Wir können somit den Satz aussprechen:

Ein Punkt $\mathfrak{X}$ des Gangraumes beschreibt bei einem geschlossenen zweigliedrigen Bewegungsvorgang eine geschlossene orientierbare Fläche des Rastraumes, die unter Zugrundelegung einer elliptischen Metrik ein Raumstück vom Inhalt V berandet. Bei geeigneter Wahl des Bezugs-Tetraeders kann im allgemeinen Fall dieser Rauminhalt durch (9) *dargestellt werden. Alle Punkte $\mathfrak{X}$ des Gangraumes, die zum gleichen Wert von V führen, erfüllen eine Quadrik. Für verschiedene Werte V, also bei Variieren von V durchlaufen diese Quadriken ein lineares Büschel, dem auch die absolute Quadrik angehört, das somit als Büschel konfokaler Quadriken anzusprechen ist.*

Ähnlich, wie ich dies für den euklidischen Raum ausführte, lassen sich naturgemäß auch bei elliptischer Maßbestimmung unter Heranziehung integralgeometrischer Begriffe (Dichten) verwandte Formeln und Sätze für geschlossene Bewegungsvorgänge von zwei und mehr Freiheitsgraden ableiten[4].

[4] *H. R. Müller*, Über Integrale bei mehrgliedrigen Bewegungsvorgängen. Mathem. Nachr. 7 (1952), 159—164.

Eine projektive Invariante von drei Linienelementen n-ter Ordnung mit einem gemeinsamen Linienelement (n−1)-ter Ordnung.

Von

Erwin Kruppa, Wien.

(Eingelangt am 13. Dezember 1952.)

Gegeben seien drei ebene Kurven c_i $(i = 1, 2, 3)$

$$y = C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1} + C_{n,i} x^n + (*), \qquad (1)$$

die die x-Achse im Nullpunkt P (0, 0) berühren und dort eine Berührung $(n-1)$-ter, aber nicht höherer Ordnung besitzen. Die Gruppe der ebenen Kollineationen, die P und die x-Achse festlassen, wird mit $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ dargestellt durch:

$$x_1 = \frac{a_{11} x + a_{12} y}{1 + a_{01} x + a_{02} y}, \quad y_1 = \frac{a_{22} y}{1 + a_{01} x + a_{02} y}. \qquad (2_{1,2})$$

Durch irgend eine Kollineation aus (2) gehen die Kurven (1) über in Kurven c_i^*:

$$y_1 = C_2^* x_1^2 + C_3^* x_1^3 + \ldots C_{n-1}^* x_1^{n-1} + C_{n,i}^* x_1^n + (*). \qquad (3)$$

In (3) lassen sich die C_k^* durch

$$C_k^* = \lim_{x_1 \to 0} \frac{y_1 - C_2^* x_1^2 - C_3^* x_1^3 - \ldots - C_{k-1}^* x_0^{k-1}}{x_1^k} \qquad (4)$$

berechnen. Dazu ersetzt man in (4) y_1 und x_1 gemäß (2) und (1) durch x, nachdem man $C_2^*, C_3^*, \ldots C_{k-1}^*$ berechnet hat. Dem Grenzübergang $x_1 \to 0$ entspricht $x \to 0$. So erhält man für $k = 2, 3$

$$C_2^* = \frac{a_{22}}{a_{11}^2} C_2, \quad C_3^* = \frac{a_{22}}{a_{11}^3} C_3 - \frac{2 a_{12} a_{22} C_2^2}{a_{11}^4}. \qquad (5_{1,2})$$

Allgemein hat C_k^* die Form:

$$C_k^* = \frac{a_{22}}{a_{11}^k} C_k + \Phi (a_{ik}, C_2, C_3, \ldots C_{k-1}). \qquad (5_3)$$

Man erkennt dies aus dem Umstand, daß beim Umrechnen der Funktion unter dem Limeszeichen in (4) auf die Veränderliche x die TAYLOR-entwicklung (1) nur im freistehenden Glied y_1 $(y(x), x)$ bis einschließlich $C_k x^k$ einzusetzen ist. Es ist für das Folgende wichtig, *daß nach* (5_3) C_k^* *linear von* C_k *abhängt.*

Sind nun drei Kurven (1) gegeben, die in P eine Berührung $(n-1)$-ter Ordnung besitzen, so folgt wegen der linearen Abhängigkeit (5_3) der $C_{n,i}^*$ von den entsprechenden $C_{n,i}$ der

Satz 1: *Wenn drei verschiedene Linienelemente n-ter Ordnung ein Linienelement* $(n-1)$*-ter Ordnung gemeinsam haben, so ist das „Teilverhältnis"*

$$J^{(n)} = \frac{C_{n,3} - C_{n,1}}{C_{n,3} - C_{n,2}} \tag{6}$$

eine projektive Invariante.

Dieser Satz gilt für alle $n > 1$. Für $n = 2$ führt er aber auf bekanntes. Die $C_{2,i}$ sind in diesem Fall zu den Krümmungen $\varkappa_i$ der c_i in P proportional. Somit gilt $J^{(2)} = (\varkappa_3 - \varkappa_1) : (\varkappa_3 - \varkappa_2)$. Nun ist aber nach *Smith, Mehmke* und *Segre* das Verhältnis der Krümmungen im Berührpunkt von zwei einander berührenden ebenen Kurven eine projektive Invariante. (6) ist daher für $n = 2$ eine triviale Folge des zuletzt genannten Satzes.

Im Folgenden sollen geometrische Deutungen der $J^{(n)}$ für $n = 3, 4, \ldots$ bis 7, sowie eine einheitliche affingeometrische Deutung für alle $n > 4$ angegeben werden.

$n = 3$: Berührt eine Kurve $y = y(x)$ die x-Achse im Nullpunkt $P(0, 0)$ (x, y Normalkoordinaten), so gilt für den Neigungswinkel $\varphi = \sphericalangle\, x\, a$ der Affinnormalen a in P gegen die x-Achse

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3\, y'(0)^2}{y''(0)}. \tag{7}$$

Nach (1) gilt demnach für die Affinnormalen a_i der c_i in P

$$\operatorname{tg} \varphi_i = -\frac{2\, C_2^2}{C_{3,i}}. \tag{8}$$

Schneidet man die a_i mit einer Parallelen zur Tangente t in P, so bestimmen die Schnittpunkte A_1, A_2, A_3 nach (8) und (6) für $n = 3$ das Teilverhältnis

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_2 A_3}} = \frac{C_{3,3} - C_{3,1}}{C_{3,3} - C_{3,2}} = J^{(3)}. \tag{9}$$

Nimmt man zu den drei Punkten A_i noch den Fernpunkt U der Tangente t in P hinzu, so ist nach (9) das Doppelverhältnis $(A_1 A_2 A_3 U) = J^{(3)}$, wofür man auch sagen kann:

Satz 2: *Die projektive Invariante $J^{(3)}$ ist das Doppelverhältnis $(a_1\, a_2\, a_3\, t)$, das die Affinnormalen a_i mit der Tangente t in P bilden.*

Aus Satz 2 folgt unmittelbar der

Satz 3: *Wenn vier Kurven einander in einem Punkt P in zweiter und nicht höherer Ordnung berühren, so ist das Doppelverhältnis ihrer Affinnormalen in P eine projektive Invariante.*

$n = 4$: Wendet man die Formel für die Affinkrümmung[1]

$$k = \frac{1}{3}\, \ddot{y}^{-5/3}\, y^{\mathrm{IV}} - \frac{5}{9}\, \ddot{y}^{-8/3} \dddot{y}^2 \tag{10}$$

(Punkte und römische Ziffern bedeuten Differentiationen nach x) auf die Kurven (1) für $n = 4$ in $P\,(0, 0)$ an, so erhält man die Affinkrümmungen

$$k_i = 8\, C_{4,i}\, (6\, C_3)^{-5/3} - 20\, C_3^2\, (2\, C_2)^{-8/3}. \tag{11}$$

Da nach (11) die k_i linear von den $C_{4,i}$ abhängen, ist

$$J^{(4)} = \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2}, \tag{12}$$

womit $J^{(4)}$ eine geometrische Deutung erhalten hat.

$n = 5$: Aus (10) ergibt sich unmittelbar, daß die Ableitung k' von k nach der Affinbogenlänge linear von y^{V} abhängt. Somit läßt sich $J^{(5)}$ geometrisch deuten als

$$J^{(5)} = \frac{k_3' - k_1'}{k_3' - k_2'}. \tag{13}$$

Offenbar gilt allgemein für alle $J^{(n)}$ die geometrische Deutung:

$$J^{(n)} = \frac{k_3^{(n-4)} - k_1^{(n-4)}}{k_3^{(n-4)} - k_2^{(n-4)}}, \tag{14}$$

worin die $k_i^{(n-4)}$ die $n-4$)-ten Ableitungen der k_i nach der Affinbogenlänge bedeuten.

---

[1] *W. Blaschke*, Vorl. üb. Differentialgeometrie II, S. 14.

$n = 6$: Es soll nun unter Heranziehung der Projektivnormalen der c_i in P eine Deutung von $J^{(6)}$ gegeben werden. Wir setzen die c_i $(i = 1, 2, 3)$, die sich in P (0, 0) in fünfter Ordnung berühren, in der Form an:

$$y = \frac{A_2}{2!} x^2 + \frac{A_3}{3!} x^3 + \frac{A_4}{4!} x^4 + \frac{A_5}{5!} x^5 + \frac{A_{6,i}}{6!} x^6 + (*). \qquad (15)$$

Wird aus den rationalen Kurven dritter Ordnung

$$y(x + b y) + c x^3 + d x^2 y + e x y^2 + f y^3, \qquad (16)$$

die in P (0, 0) ihren Doppelpunkt haben und deren Doppelpunkttangenten die x-Achse und die Gerade $x + b y = 0$ sind, diejenige ermittelt, die eine Kurve (15) in der Umgebung des Linienelementes (P, x) in der sechsten Ordnung berührt, so ist die Doppelpunktstangente $x + b y = 0$ die *Projektivnormale* p der Kurve in P. Die Koeffizienten $b, c, \ldots f$ in (16) sind durch die Gleichungen bestimmt, die aus (16) entstehen, indem man (16) siebenmal hintereinander total nach x differenziert und dann $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$ und für $y^{(n)}$ aus (15) A_n setzt. Nach dreimaliger Differentiation erhält man $A_2 + 2c = 0$. Die vier weiteren Gleichungen sind, wie man, ohne sie vollständig ausrechnen zu müssen, erkannt, linear in b, d, e, f und von folgendem Bau:

$$4 A_3 = L_3(b, d), \quad 5 A_4 = L_4(b, d, e),$$
$$6 A_5 = L_5(b, d, e, f) = 0, \quad 7 A_{6,i} = L_{6,i}(b, d, e, f), \qquad (16)$$

worin die L_j lineare Formen der angezeigten Argumente bedeuten mit Koeffizienten, die Funktionen der A_r mit $r < n$ sind.

Sind φ_i die Winkel der Projektivnormalen p_i in P gegen die x-Achse, so ist nach dem oben Gesagten $\cot \varphi_i = -b_i$. Demnach folgt aus (16)

$$\cot \varphi_i = A_{6,i} \Phi(A_2 A_3 \ldots A_5) + \Psi(A_2, A_3 \ldots A_5). \qquad (17)$$

Demnach hängt $\cot \varphi_i$ linear von $A_{6,i}$ ab. Daraus folgt ebenso wie für die Affinnormalen in Satz 2 der

Satz 5: *Die projektive Invariante*

$$J^{(6)} = \frac{A_{6,3} - A_{6,1}}{A_{6,3} - A_{6,2}}$$

ist das Doppelverhältnis $(p_1 p_2 p_3 t)$, *das die Projektivnormalen* p_i *mit der Tangente in* P *bilden.*

$n = 7$: Es seien nun drei Kurven c_i $(i = 1, 2, 3)$

$$y = \frac{A_2}{2!} x^2 + \frac{A_3}{3!} x^3 + \ldots + \frac{A_6}{6!} x^6 + \frac{A_{7,i}}{7!} x^7 + (*) \qquad (18)$$

gegeben, die einander in $P(0, 0)$ in sechster Ordnung berühren. Zur Deutung von $J^{(7)}$ ziehen wir die Projektivkrümmung heran, für deren Berechnung wir das von *L. Berwald*[2] angegebene Verfahren anwenden. Wir fassen $(x, y, 1)$ als normierte homogene Punktkoordinaten auf. Die Projektivbogenlänge s der Kurve ist dann mit x als Parameter

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{\Phi(x)^{1/3}}{\ddot{y}}\,dx, \qquad (19_{1,2})$$
$$\Phi = \tfrac{1}{2}(9\,\ddot{y}^2\,y^{V} - 45\,\ddot{y}\,\dddot{y}\,y^{IV} + 40\,\dddot{y}^3),$$

worin die Punkte und römische Ziffern die Ableitungen nach x bedeuten. Wird die Ableitung nach s mit einem Strich bezeichnet, so ist nach (19)

$$x' = \frac{3\,\ddot{y}}{\Phi^{1/3}}. \qquad (20)$$

Für die Determinante $(x, x'\,x'')$, worin x für $(x, y, 1)$ gesetzt ist, ergibt sich

$$(x\,x'\,x'') = \ddot{y}\,x'^3. \qquad (21)$$

Nun hat man von den $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ auf neue normierte Koordinaten

$$X_i = \frac{x_i}{(x\,x'\,x'')^{1/3}} \qquad (22)$$

überzugehen; dann ist

$$(X\,X''\,X''') = K \qquad (23)$$

die *Projektivkrümmung* der Kurve. Für die X_i in (22) findet man nach (20) und (21)

$$X_1 = \frac{x\,\Phi^{1/3}}{3\,\ddot{y}^{4/3}}, \quad X_2 = \frac{y\,\Phi^{1/3}}{3\,\ddot{y}^{4/3}}, \quad X_3 = \frac{\Phi^{1/3}}{3\,\ddot{y}^{4/3}}. \qquad (24)$$

Da Φ nach (19_2) von fünfter Ordnung ist, ist X''' gemäß (24) von achter Ordnung. Doch ist bekanntlich die Projektivkrümmung K von siebenter Ordnung und wir haben daher unsere Aufmerksamkeit auf die y^{VII} enthaltenden Glieder zu richten. Ohne die dreimalige Differentiation von (24) nach s wirklich auszuführen, bemerkt man, daß sie nur in $\ddot{\Phi}$ auftreten und gemäß (19_2) linear in das durch (23) gegebene K eingehen. Mit $y_i^{VII} = A_{7,i}$ gemäß (18) sind demnach die Projektivkrümmungen

[2] Zur proj. Differentialgeometrie, Jber. DMV 30 (1921), S. 117, Enz. math. Wiss. III D, S. 106.

K_i der c_i in $P(0, 0)$ linear von den $A_{7,i}$ abhängig und es ist somit

$$J^{(7)} = \frac{K_3 - K_1}{K_3 - K_2}, \tag{25}$$

womit eine geometrische Deutung von $J^{(7)}$ vorliegt.

$J^{(7)}$ läßt sich auch durch das Doppelverhältnis von vier mit der Kurve projektiv-invariant verbundenen Punkten auf der Tangente von $P = X$ darstellen. Dazu nehme man die drei Punkte[3]

$$R_i' = X - \tfrac{1}{2} K_i X' \quad (i = 1, 2, 3)$$

und den Punkt $Q = X'$. Dann ist gemäß (25)

$$J^{(7)} = (R_1' \; R_2' \; R_3' \; Q). \tag{26}$$

[3] Enz. math. Wiss. III D_{11}, S 107.

Eine Bemerkung zur projektiven Invariante J^n in der voranstehenden Arbeit von E. Kruppa.

Von

R. Bereis, Wien.

(Eingelangt am 13. Dezember 1952.)

Berühren drei ebene Kurven c_i $(i = 1, 2, 3)$

$$y = \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{A_{n,i}}{n!}x^n + (*) \ldots \quad (1)$$

die Abszissenachse eines Normalkoordinatensystems im Nullpunkt $P\,(0, 0)$ und besitzen sie dort eine Berührung von genau $(n-1)$-ter Ordnung, so ist, wie in der voranstehenden Arbeit gezeigt wird,

$$J^{(n)} = \frac{A_{n,3} - A_{n,1}}{A_{n,3} - A_{n,2}} \quad (2)$$

eine projektive Invariante.

Bekanntlich[1] hängen die Koordinaten der $(n-1)$-ten Krümmungsmitte M_{n-1} linear von $y^{(n)}$ ab. Wegen $y^{(n)} = A_{n,i}$ folgt nach (2) für die drei c_i in P

$$J^{(n)} = \frac{M_{3,n-1} - M_{1,n-1}}{M_{3,n-1} - M_{2,n-1}},$$

womit eine metrische Deutung von $J^{(n)}$ für alle n gegeben ist.

Für den Fall $n = 4$ hat *E. Kruppa* die geometrische Deutung

$$J^{(4)} = \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} \quad (3)$$

gegeben, wenn die k_i die Affinkrümmungen der Kurven c_i in P bedeuten. Im folgenden soll eine anschauliche Deutung von $J^{(4)}$ gegeben werden.

Es sei

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 + 2 y = 0 \quad (4)$$

---

[1] *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Kurven, (1910) I., s. 69.

der Schmiegkegelschnitt (fünfpunktig berührend) k^2 einer der Kurven c_i in P ($a \neq 0$). Die Ableitungen von y nach x in P drücken sich durch a, b, c in folgender Weise aus:

$$y' = 0,\ y'' = -a,\ y''' = 3ab,\ y^{IV} = -3a(4b^2 + ac). \tag{5}$$

Bedeuten r den Krümmungsradius in P, φ den Winkel, den der durch P gehende Durchmesser von k^2 (Affinnormale) mit der x-Achse bildet, und x_m die Abszisse des Mittelpunktes von k^2, so folgt aus (4)

$$r = -\frac{1}{a},\ \operatorname{tg}\varphi = -\frac{a}{b},\ x_m = \frac{b}{ac - b^2} \tag{6}$$

Zufolge (6) gehen die Formeln (5) über in

$$y' = 0,\ y'' = \frac{1}{r},\ y''' = -\frac{3\operatorname{ctg}\varphi}{r^2},\ y^{IV} = \frac{3\operatorname{ctg}\varphi}{r^2}\left(\frac{5\operatorname{ctg}\varphi}{r} + \frac{1}{x_m}\right)\cdots \tag{7}$$

Nun ist im Falle $n = 4$ für die Kurven c_i in P $y_i^{IV} = A_{4,i}$. Somit folgt aus (2) und aus (7)

$$J^{(4)} = \frac{A_{4,3} - A_{4,1}}{A_{4,3} - A_{4,2}} = \frac{\dfrac{1}{x_{m,3}} - \dfrac{1}{x_{m,1}}}{\dfrac{1}{x_{m,3}} - \dfrac{1}{x_{m,2}}}. \tag{8}$$

Sind M_1, M_2, M_3 die Mitten der Schmiegkegelschnitte der c_i in P, so ist (8) das Doppelverhältnis der vier Punkte $M_{1,2,3}$ und P. Also ist

$$J^{(4)} = (M_1 M_2 M_3 P). \tag{9}$$

Affingeometrisch kann (9) unmittelbar aus (3) gefolgert werden.

Die Flachtangenten der ebenen Kurven vierter Ordnung.

Von

R. W. Weitzenböck, Zelhem (Niederlande).

(Eingelangt am 16. Februar 1953).

Eine Gerade T schneidet eine ebene Kurve vierter Ordnung C_4 in vier Punkten; fallen diese vier Punkte in einen einzigen Punkt F zusammen, so wird T „*Flachtangente*", der Punkt F „*Flachpunkt*" der C_4 genannt. T und F zusammen bilden ein „*Flachelement*". Dabei ist es nicht notwendig, daß die C_4 in einem Flachpunkt besonders „flach" verläuft. Zu den Flachtangenten rechnen wir auch eine Wendetangente, wenn der zugehörige Wendepunkt gleichzeitig Doppelpunkt der C_4 ist. Ebenso ist die Tangente an einen Zweig in einem dreifachen Punkte eine Flachtangente.

Von zwei Flachelementen können die Flachpunkte zusammenfallen und die Flachtangenten verschieden sein; fallen die Flachtangenten zusammen, so auch die zugehörigen Flachpunkte. Flachelemente mit zusammenfallenden Flachtangenten und getrennt liegenden Flachpunkten sind bei Kurven der Ordnung vier nicht möglich.

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die C_4 nicht zerfällt, d. h. also keine Gerade und keinen Kegelschnitt als Bestandteil aufweist. Eine C_4 besitzt im Allgemeinen keine Flachpunkte. Das Vorhandensein eines solchen ist mit drei Bedingungen äquivalent. Es gibt aber auch nicht zerfallende, doppelpunktslose C_4 mit 12 Flachelementen. Eine Übersicht aller Möglichkeiten ist am Schlusse der Arbeit zusammengestellt[1].

§ 1. Allgemeines.

In homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 sei die C_4 gegeben durch

$$f = a_{1111}\, x_1^4 + \ldots + 4\, a_{1112}\, x_1^3\, x_2 + \ldots + 6\, a_{2233}\, x_2^2\, x_3^2 + \ldots + 12\, a_{1233}\, x_1\, x_2\, x_3^2 = 0. \tag{1}$$

[1] Ansätze zu dem hier behandelten Problem finden sich bei W. G. J. *ten Pas*, Dissertation Amsterdam (1933) und G. H. A. *Grosheide*, Dissertation Amsterdam (1937).

Die Gerade $x_1 = 0$ ist eine Flachtangente T wenn $(f)_{x_1 = 0}$ die Gestalt $(p_2 x_2 + p_3 x_3)^4$ hat, d. h. wir haben dann

$$\left\{\begin{array}{l} f = a_{1111} x_1^4 + p_2^4 x_2^4 + p_3^4 x_3^4 + \\ + 4 p_2^3 p_3 x_2^3 x_3 + 4 p_2 p_3^3 x_2 x_3^3 + \\ + 4 a_{3331} x_3^3 x_1 + 4 a_{1113} x_3 x_1^3 + \\ + 4 a_{1112} x_1^3 x_2 + 4 a_{1222} x_1 x_2^3 + \\ \quad + 6 p_2^2 p_3^2 x_2^2 x_3^2 + 6 a_{3311} x_3^2 x_1^2 + 6 a_{1122} x_1^2 x_2^2 + \\ \quad + 12 a_{1123} x_1^2 x_2 x_3 + 12 a_{1223} x_1 x_2^2 x_3 + 12 a_{1233} x_1 x_2 x_3^2. \end{array}\right. \tag{2}$$

Der zugehörige Flachpunkt F_1 ist der Schnittpunkt von $x_1 = 0$ mit $p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$, hat also die Koordinaten

$$F_1 \ldots 0 : -p_3 : p_2, \tag{3}$$

d. h. liegt durch Angabe von $\dfrac{p_2}{p_3}$ auf $x_1 = 0$ fest. Hieraus folgt, daß bei einer allgemeinen C_4 die Vorgabe eines Flachelementes $T + F$ mit vier Bedingungen äquivalent ist. Ist nur T gegeben, so bedeutet dies drei Bedingungen. Es gibt also $\infty^{10} C_4$ mit einem gegebenen Flachelement $T + F$ und $\infty^{11} C_4$ mit einer gegebenen Flachtangente T.

Ebenso gibt es $\infty^{11} C_4$ mit einem gegebenen Flachpunkt F. Soll nämlich der Punkt P_1 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) Flachpunkt sein, so muß erstens $a_{1111} = 0$ sein und zweitens $(f)_{x_3 = -\lambda x_2}$ die Gestalt $c \,.\, x_3^4$ erhalten. Dies letztere gibt die drei Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1112}\,\lambda - a_{1113} = 0 \\ a_{1122}\,\lambda^2 - 2\,a_{1123}\,\lambda + a_{1133} = 0 \\ a_{1222}\,\lambda^3 - 3\,a_{1223}\,\lambda^2 + 3\,a_{1233}\,\lambda - a_{1333} = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Mit $a_{1111} = 0$ zusammen gibt dies also drei Bedingungsgleichungen für die a_{ijkl} . $\lambda = \dfrac{a_{1113}}{a_{1112}}$ gibt die Tangente in P_1, also die zugehörige Flachtangente.

§ 2. Mehrfache Flachpunkte.

Von den leicht angebbaren Spezialisierungen von f bei zwei Flachelementen behandeln wir nur den Fall, daß die Flachtangente T, des ersten Flachelementes $T_1 + F_1$ durch den Flachpunkt F_2 des zweiten Elementes $T_2 + F_2$ geht. Dann müssen nämlich F_1 und F_2 zusammenfallen, d. h. wir haben einen *Doppelflachpunkt.*

Wieder von (1) ausgehend sei $P_1 = F_1$ mit $T_1 = x_2 = 0$. Dann hat $(f)_{x_2 = 0}$ die Gestalt $k \,.\, x_3^4$, d. h. wir haben

$$a_{1113} = 0,\ a_{1133} = 0 \text{ und } a_{1333} = 0.$$

Ist $x_2 = \sigma x_3$ eine T_2, so muß weiters $(f)_{x_2 = \sigma x_3}$ die Gestalt $k \cdot x_3^4$ annehmen; also ist

$$\begin{cases} \sigma a_{1112} = 0 \\ \sigma^2 a_{1122} + 2\sigma a_{1123} = 0 \\ \sigma^3 a_{1222} + 3\sigma^2 a_{1223} + 3\sigma a_{1233} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Diese Gleichungen werden befriedigt durch $\sigma = 0$, was $T_1 = x_2 = 0$ liefert. Es bleibt

$$\begin{cases} \sigma\ a_{1122} + 2 a_{1123} = 0 \\ \sigma^2 a_{1222} + 3\sigma a_{1223} + 3 a_{1233} = 0 \end{cases} \quad \text{also} \quad \begin{cases} 2 a_{1123} = -\sigma\ a_{1122} \\ 3 a_{1233} = -\sigma^2 a_{1222} - 3\sigma a_{1223}. \end{cases}$$

Setzt man dies in f ein, so wird

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2 (x_2 - \sigma x_3)[6 a_{1122} x_1 + 4 a_{1222}(x_2 + \sigma x_3) + 12 a_{1223} x_3] \tag{6}$$

mit

$$f_4(x_2, x_3) = a_{2222} x_2^4 + \ldots + 6 a_{2233} x_2^2 x_3^2.$$

Hierbei ist $f_4(x_2, x_3)$ nicht mehr durch $x_2 - \sigma x_3$ teilbar, da sonst die C_4 zerfällt.

In (6) unterscheiden wir zwei Fälle, jenachdem σ Null ist oder nicht. Bei $\sigma = 0$ haben wir

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^2 (a x_1 + b x_2 + c x_3). \tag{7}$$

Hier ist bei $a \neq 0$ der Doppelpunkt P_1 ein Selbstberührungspunkt mit der doppelt zu zählenden Flachtangente $T_1 = T_2 = x_2 = 0$.

Bei $\sigma \neq 0$ nehmen wir $x_2 - \sigma x_3 = 0$ als neue Gerade $x_3 = 0$; f erhält dann die Gestalt

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2 x_3 (a x_1 + b x_2 + c x_3). \tag{8}$$

Der Doppelpunkt P_1 ist bei $a \neq 0$ doppelter Wendepunkt und die beiden Wendetangenten sind die Flachtangenten $T_1 = x_2 = 0$ und $T_2 = x_3 = 0$.

Verlangen wir, daß noch eine dritte Flachtangente $T_3 = x_2 - \tau x_3 = 0$ durch P_1 geht, so muß in (7) und (8) $a = 0$ sein, d. h. wir erhalten

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^2 (x_2 - \tau x_3) \tag{7a}$$

bzw.

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3). \tag{8a}$$

In beiden Fällen ist jetzt P_1 *dreifacher* Punkt und die binäre Form $f_4(x_2, x_3)$ ist nicht durch $x_2 - \tau x_3$ teilbar. Bei (7a) haben wir für $\tau \neq 0$

in P_1 eine Spitze mit der Spitzentangente $x_2 = 0$ und einem einfachen Ast durch P_1 mit der Tangente $T_3 = x_2 - \tau x_3 = 0$.

Bei (8a) ist für $\tau \neq 0$ der Punkt P_1 ein dreifacher Punkt mit drei verschiedenen, längs T_1, T_2 und T_3 laufenden Zweigen.

$\tau = 0$ gibt die zwei weiteren Spezialisierungen

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^3 \tag{7b}$$

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^2 x_3 \tag{8b}$$

wobei sich (8b) von (7a) nur dadurch unterscheidet, daß jetzt $x_3 = 0$ an Stelle von $x_2 - \tau x_3 = 0$ als dritte Seite des Koordinatendreieckes gewählt wurde.

Zusammenfassend erhalten wir also die folgenden Möglichkeiten:

C_4 mit *Doppelflachpunkt* P_1:

1. Getrennte Flachtangenten $T_1 = x_2 = 0$ und $T_2 = x_3 = 0$ (vgl. (8)):

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2 x_3 (a x_1 + b x_2 + c x_3) \qquad (a \neq 0) \qquad (\varphi_1)$$

2. Zusammenfallende Flachtangenten $T_1 = T_2 = x_2 = 0$ (vgl. (7)):

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^2 (a x_1 + b x_2 + c x_3) \qquad (a \neq 0) \qquad (\varphi_2)$$

C_4 mit *dreifachem Flachpunkt* P_1:

1. Drei getrennte Flachtangenten $T_1 = x_2 = 0$, $T_2 = x_2 = 0$ und $T_3 = x_2 - \tau x_3 = 0$ $\tau \neq 0, \tau \neq \infty$ (vgl. (8a)):

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3) \qquad (\psi_1)$$

wobei f_4 nicht durch $x_2 - \tau x_3$ teilbar ist.

2. Eine einzelne und zwei zusammenfallende Flachtangenten $T_3 = x_3 = 0$ bzw. $T_1 = T_2 = x_3 = 0$ (vgl. (8b)):

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^2 x_3. \qquad (\psi_2)$$

3. Eine dreifache Flachtangente $x_2 = 0$ (vgl. (7b)):

$$f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^3. \qquad (\psi_3)$$

Man sieht leicht, daß die Forderung nach einer vierten Flachtangente T_4 durch P_1 bei den drei Möglichkeiten (ψ_1), (ψ_2) und (ψ_3) das Zerfallen der C_4 in vier durch P_1 gehende Geraden nach sich zieht.

§ 3. Weitere Flachtangenten.

Wir behandeln weiterhin die Fälle (φ_1), (φ_2), (ψ_1), (ψ_2) und (ψ_3) unter der Annahme, *daß noch eine weitere, nicht durch P_1 gehende Flachtangente existiert.* Wir nehmen sie als $x_1 = 0$. Dies hat zur Folge, daß $f_4(x_2, x_3)$ eine vierte Potenz sein muß

$$f_4(x_2, x_3) = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4.$$

Also wird jetzt:

$$f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2 x_3 (a x_1 + b x_2 + c x_3) \quad (a \neq 0) \quad (\varphi_1')$$
$$f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2^2 (a x_1 + b x_2 + c x_3) \quad (a \neq 0) \quad (\varphi_2')$$
$$f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3) \quad (\tau \neq 0) \quad (\psi_1')$$
$$f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2^2 x_3 \quad (\psi_2')$$
$$f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2^3. \quad (\psi_3')$$

Der neue Flachpunkt (F_3 bzw. F_4) hat dann die Koordinaten

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_3 \end{Vmatrix} = 0 : -p_3 : p_2. \tag{9}$$

Nun sei $x_1 = Bx_2 + Cx_3$ eine weitere Flachtangente, die nicht durch P_1 geht. $(f)_{x_1 = Bx_2 + Cx_3} = (f)_{x_1}$ muß dann die Gestalt $(\varrho x_2 + \sigma x_3)^4$ annehmen. Wir gehen die Fälle (φ_i') und (ψ_i') der Reihe nach durch und beginnen mit (ψ_3'). Hier wird

$$(p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + (Bx_2 + Cx_3) x_2^3 = (\varrho x_2 + \sigma x_3)^4,$$

woraus ich ergibt:

$$\begin{cases} \varrho^4 = p_2^4 + B \\ 4\varrho^3\sigma = 4 p_2^3 p_3 + C \\ 6\varrho^2\sigma^2 = 6 p_2^2 p_3^2 \\ 4\varrho\sigma^3 = 4 p_2 p_3^3 \\ \sigma^4 = p_3^4 \end{cases} \tag{10}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt

$$\sigma = \gamma p_3 \text{ mit } \gamma^4 = 1.$$

Setzt man dies ein, so folgt wegen $p_3 \neq 0$:

$$p_2 = \varrho\gamma^3, \ \varrho = \gamma p_2, \text{ also } B = 0 \text{ und } C = 0. \tag{11}$$

Es gibt also hier *keine* T_5.

Bei (ψ_2') haben wir

$$(p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_2^2 x_3 (Bx_2 + Cx_3) = (\varrho x_2 + \sigma x_3)^4,$$

also

$$\begin{cases} \varrho^4 = p_2^4 \\ 4\varrho^3\sigma = 4 p_2^3 p_3 + B \\ 6\varrho^2\sigma^2 = 6 p_2^2 p_3^2 + C \\ 4\varrho\sigma^3 = 4 p_2 p_3^3 \\ \sigma^4 = p_3^4 \end{cases} \tag{12}$$

Somit ist $\varrho = \beta p_2$ und $\sigma = \gamma p_3$ mit $\beta^4 = \gamma^4 = 1$.

Die vorletzte Gleichung gibt $\beta = \gamma$ und hieraus $B = 0$ und $C = 0$, d. h. auch hier gibt es *keine* T_5.

Bei (ψ_1') haben wir

$$(f)_{x_1} = (p_2\, x_2 + p_3\, x_3)^4 + (B x_2 + C x_3)\, x_2\, x_3\, (x_2 - \tau\, x_3) = (\varrho\, x_2 + \sigma\, x_3)^4$$

und hieraus

$$\left\{\begin{array}{ll} & 4\, p_2^3\, p_3\, (\beta^3\gamma - 1) = B \\ \varrho = \beta\, p_2, & 6\, p_2^2\, p_3^2\, (\beta^2\gamma^2 - 1) = -\tau\, B + C \quad (p_2\, p_3\, \tau \neq 0) \\ \sigma = \gamma\, p_3, & 4\, p_2\, p_3^3\, (\beta\gamma^3 - 1) = -\tau\, C \end{array}\right. \tag{13}$$

Hier kann man $\beta \neq \gamma$ voraussetzen, da sonst $B = C = 0$ und $T_5 = x_1 = 0$ wäre. Die drei rechten Gleichungen in (13) haben dann und nur dann eine Lösung B, C, wenn

$$4\, \tau^2\, p_2^2\, (\beta^3\gamma - 1) + 6\, p_2\, p_3\, \tau\, (\beta^2\gamma^2 - 1) + 4\, p_3^2\, (\beta\gamma^3 - 1) = 0 \tag{14}$$

ist. Setzen wir $\dfrac{p_2}{p_3} = p$, so gibt dies

$$4\, (\tau\, p)^2\, (\beta^3\gamma - 1) + 6\, (\tau\, p)\, (\beta^2\gamma^2 - 1) + 4\, (\beta\gamma^3 - 1) = 0 \tag{15}$$

und hieraus

$$\tau\, p = \tau\, \frac{p_2}{p_3} = \frac{1}{4\, (\beta^3\gamma - 1)}\, [-3\, (\beta^2\gamma^2 - 1) \pm \sqrt{D_{11}}] \tag{16}$$

mit

$$D_{11} = 9\, (\beta^2\gamma^2 - 1)^2 - 16\, (\beta^3\gamma - 1)\, (\beta\gamma^3 - 1) = -14 - 18\, \beta^2\gamma^2 + 16\, \beta\gamma\, (\beta^2 + \gamma^2). \tag{17}$$

Da $\beta \neq \gamma$, so kommen für die Paare β, γ zwölf Möglichkeiten in Betracht, von denen die ersten sechs durch

$$\beta, \gamma = 1, -1;\ 1, i;\ 1, -i;\ -1, i;\ -1, -i \text{ und } i, -i \tag{18}$$

gegeben sind. Die weiteren sechs entstehen hieraus durch Vertauschung von β mit γ. Wir stellen die Werte von $\beta^3\gamma - 1$, $\beta^2\gamma^2 - 1$, ... für die sechs Paare (18) in folgender Tabelle zusammen:

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6
$\beta, \gamma =$	$1, -1$	$1, i$	$1, -i$	$-1, i$	$-1, -i$	$i, -i$
$\beta^3\gamma - 1$	-2	$i-1$	$-(i+1)$	$-(i+1)$	$i-1$	-2
$\beta^2\gamma^2 - 1$	0	-2	-2	-2	-2	0
$\beta\gamma^3 - 1$	-2	$-(i+1)$	$i-1$	$i-1$	$-(i+1)$	-2
$\beta\gamma$	-1	i	$-i$	$-i$	i	1
$\beta^2\gamma^2$	1	-1	-1	-1	-1	1
$\beta^2 + \gamma^2$	2	0	0	0	0	-2
D_{11}	-64	4	4	4	4	-64

Wir nennen die sechs Paare von (18) kurz $W_1, W_2, \ldots, W_6$ und die hieraus durch Vertauschung von β mit γ entstehenden $W_1', W_2', \ldots, W_6'$. Dann ergeben sich nach (16) und (17) für τp die folgenden Werte:

$$\begin{cases} (\tau p)_{w_1} = \mp i \\ (\tau p)_{w_2} = -\frac{1}{2}(i+1), -(i+1) \\ (\tau p)_{w_3} = i-1, \frac{1}{2}(i-1) \\ (\tau p)_{w_4} = i-1, \frac{1}{2}(i-1) \\ (\tau p)_{w_5} = -\frac{1}{2}(i+1), -(i+1) \\ (\tau p)_{w_6} = \mp i \end{cases} \qquad \begin{cases} (\tau p)_{w_1'} = \mp i \\ (\tau p)_{w_2'} = i-1, \frac{1}{2}(i-1) \\ (\tau p)_{w_3'} = -(i+1), -\frac{1}{2}(i-1) \\ (\tau p)_{w_4'} = -(i+1), -\frac{1}{2}(i-1) \\ (\tau p)_{w_5'} = i-1, \frac{1}{2}(i-1) \\ (\tau p)_{w_6'} = \mp i \end{cases} \tag{20}$$

Der fünfte Flachpunkt F_5 ist gegeben als Schnitt der beiden Geraden $x_1 = Bx_2 + Cx_3$ und $\beta p_2 x_2 + \gamma p_3 x_3 = 0$; er hat also die Koordinaten

$$F_5 \ldots (\beta p_2 C - \gamma p_3 B) : -\gamma p_3 : \beta p_2. \tag{21}$$

Hat das Produkt τp einen der Werte von (20), so existiert ein fünftes Flachelement $T_5 + F_5$ mit

$$T_5 \ldots x_1 = 4 p_2^3 p_3 (\beta^3 \gamma - 1) x_2 - \frac{4 p_2 p_3^3}{\tau} (\beta \gamma^3 - 1) x_3 \tag{22}$$

und F_5 nach (21).

Man sieht leicht, daß sich dann die W_i und W_i' in drei verschiedene Klassen aufteilen lassen, indem bei

$$W_1, W_6, W_1', W_6', \text{ bei } W_2, W_5, W_3', W_4' \text{ und bei } W_3, W_4, W_2', W_5' \tag{22a}$$

dieselben T_5 und F_5 erhalten werden. Wir bekommen so:

Bei W_1 mit $\tau p = \mp i$:

$$T_5 \ldots x_1 = 8 i\tau p_2^4 (x_2 + \tau x_3) \text{ mit } F_5 \ldots -8 (i+1) p_2^4 \tau^2 : -i\tau : 1. \tag{23a}$$

Bei $\tau p = i$ haben wir $p_3 = -i\tau p_2$ und f wird also in diesem Falle:

$$f = (x_2 - i\tau x_3)^4 \cdot p_2^4 + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3). \tag{24a}$$

Bei W_2 mit $\tau p = -(i+1)$ haben wir $p_3 = \frac{1}{2}\tau (i-1) p_2$ und daher:

$$T_5 \ldots x_1 = p_2^4 \tau (i-1)^2 (2 x_2 - \tau x_3) \text{ mit } F_5 \ldots p_2^4 \tau^2 i (i-1)^2 : \tfrac{1}{2}(i+1)\tau : 1. \tag{23b}$$

Die C_4 ist jetzt gegeben durch

$$f = (x_2 + \tfrac{1}{2}\tau (i-1) x_3)^4 \cdot p_2^4 + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3) = 0. \tag{24b}$$

Bei W_2 haben wir dann noch die zweite Möglichkeit mit

$$\tau p = -\tfrac{1}{2}(i+1), \; p_3 = \tau p_2 (i-1)$$

und dies gibt für die fünfte Flachtangente:

$T_5 \ldots x_1 = 4 p_2^4 \tau (i-1)^2 (x_2 + 2\tau x_3)$ und $F_5 \ldots 4 p_2^4 \tau^2 (i-1)^2 (i+3) : \tau (i+1) : 1$ (23b′)

f wird jetzt:

$$f = (x_2 + \tau (i-1) x_3)^4 p_2^4 + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3). \quad (24b')$$

Bei W_3: Hier erhalten wir alle Formeln, wenn wir in W_2 i durch $-i$ ersetzen. Also wird, vorerst für $\tau p = i - 1$ und $p_3 = -\frac{1}{2} \tau (i+1) p_2$:

$$\begin{cases} T_5 \ldots x_1 = p_2^4 \tau (i+1)^2 (2 x_2 - \tau x_3) \\ F_5 \ldots - p_2^4 \tau^2 i (i+1)^2 : -(1-i) : 1 \end{cases} \quad (23c)$$

mit

$$f = (x_2 - \tfrac{1}{2} \tau (i+1) x_3)^4 p_2^4 + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3). \quad (24c)$$

Ebenso aus (23b′) und (24b′) bei $p\tau = \frac{1}{2} (i-1)$ und $p_3 = -\tau p_2 (i+1)$:

$$\begin{cases} T_5 \ldots x_1 = 4 p_2^4 \tau (i+1)^2 (x_2 + 2\tau x_3) \\ F_5 \ldots 4 p_2^4 \tau^2 (i+1)^2 (3-i) : \tau (1-i) : 1 \end{cases} \quad (23c')$$

mit

$$f = (x_2 - \tau (i+1) x_3)^4 p_2^4 + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3). \quad (24c')$$

Wir haben hier also fünf Typen von C_4 mit fünf Flachelementen: drei Flachtangenten durch den dreifachen Flachpunkt P und zwei weitere Flachelemente $T_4 + F_4$ und $T_5 + F_5$.

Wenn bei (ψ_1') noch eine sechste Flachtangente existieren soll und $x_1 = B' x_2 + C' x_3$ deren Gleichung ist, so haben wir nach (13):

$$\begin{cases} 4 p_2^3 p_3 (\beta'^3 \gamma' - 1) = B' \\ 6 p_2^2 p_3^2 (\beta'^2 \gamma'^2 - 1) = -\tau B' + C' \quad \text{mit } p_2 p_3 \tau \neq 0 \text{ und } \beta' \neq \gamma'. \\ 4 p_2 p_3^3 (\beta' \gamma'^3 - 1) = -\tau C' \end{cases}$$

Für $T_6 \neq T_5$ ist also $\beta'^3 \gamma' - 1 \neq \beta^3 \gamma - 1$ oder $\beta \gamma' \neq \beta' \gamma$ notwendig und hinreichend. Nach (19) müssen dann β, γ und β', γ' zwei verschiedenen der drei Klassen (22a) angehören. Für diese drei Klassen hat aber τp nach (20) drei verschiedene Werte, d. h. man erhält also keine weitere Flachtangente T_6.

Hiermit ist auch der Fall (ψ_1') erledigt.

§ 4. Die Fälle (φ_i').

Bei (φ_2') führt der Ansatz $x_1 = B x_2 + C x_3$ zu

$$(p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + (B x_2 + C x_3) x_2^2 ((aB+b) x_2 + (aC+c) x_3) = (\varrho x_2 + \sigma x_3)^4$$

und also analog (10) zu den Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho^4 = p_2^4 + B(aB+b) \\ 4\varrho^3\sigma = 4p_2^3 p_3 + B(aC+c) + C(aB+b) \\ 6\varrho^2\sigma^2 = 6p_2^2 p_3^2 + C(aC+c) \\ 4\varrho\,\sigma^3 = 4p_2 p_3^3 \\ \sigma^4 = p_3^4 \end{cases} \tag{25}$$

also wieder zu $\sigma = \gamma p_3$. Setzt man dies in die übrigen Gleichungen (25) ein, so folgt $\varrho = \gamma p_2$, also

$$B(aB+b) = 0,\ C(aC+c) = 0,\ B(aC+c) + C(aB+b) = 0. \tag{26}$$

Hier sind B und C nicht beide Null, da sonst $T_5 = x_1 = 0$ wäre. Dann folgen aber

$$aB + b = 0 \text{ und } aC + c = 0, \text{ also wegen } a \neq 0:$$

$$B = -b/a,\ C = -c/a \text{ und } T_5 \ldots ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

wird mit T_4 identisch.

Wir haben also bei (ψ_2') keine T_5. $T_1 = T_2 = x_2 = 0$ gehen durch den Doppelflachpunkt $P_1 = F_1 = F_2$; F_3 liegt auf $T_3 = x_1 = 0$ und T_4 ist die Gerade $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ mit $a \neq 0$; F_4 liegt mit F_3 und P_1 auf der Geraden $p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$.

Es bleibt schließlich noch der Fall (φ_1'). Hier haben wir $T_1 = x_2 = 0$, $T_2 = x_3 = 0$, $F_1 = F_2 = P_1$; $T_3 = x_1 = 0$ mit F_3 nach (9). T_4 ist wieder $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ mit $a \neq 0$ und F_4 liegt wieder mit F_1 und F_3 auf derselben Geraden $p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$.

Eine $T_5 = x_1 = Bx_2 + Cx_3$ liefert

$$(p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + (Bx_2 + Cx_3)\, x_2 x_3\, [(aB+b)x_2 + (aC+c)x_3] = (\varrho x_2 + \sigma x_3)^4$$

und also die Gleichungen:

$$\begin{cases} \varrho^4 = p_2^4 \\ 4\varrho^3\sigma = 4p_2^3 p_3 + B(aB+b) \\ 6\varrho^2\sigma^2 = 6p_2^2 p_3^2 + B(aC+c) + C(aB+b) \\ 4\varrho\,\sigma^3 = 4p_2 p_3^3 + C(aC+c) \\ \sigma^4 = p_3^4. \end{cases} \tag{27}$$

Es ist also wieder $\varrho = \beta p_2$ und $\sigma = \gamma p_3$ und hiermit:

$$\begin{cases} 4p_2^3 p_3(\beta^3\gamma - 1) = B(aB+b) \\ 6p_2^2 p_3^2(\beta^2\gamma^2 - 1) = B(aC+c) + C(aB+b),\ p_2 p_3 a \neq 0 \text{ und } \beta \neq \gamma \\ 4p_2 p_3^3(\beta\ \gamma^3 - 1) = C(aC+c). \end{cases} \tag{28}$$

Hieraus folgt

$C \cdot 4\,p_2^2\,(\beta^3\gamma - 1) - CB \cdot 6\,p_2\,p_3\,(\beta^2\gamma^2 - 1) + B \cdot 4\,p_3^2\,(\beta\,\gamma^3 - 1) = 0$
oder, für

$$C = -\pi B,\ p = \frac{p_2}{p_3}: \tag{29}$$

$$4\,(\pi\,p)^2\,(\beta^3\gamma - 1) + 6\,(\pi\,p)\,(\beta^2\gamma^2 - 1) + 4\,(\beta\,\gamma^3 - 1) = 0, \tag{15}$$

also Gleichung (15). Für $\pi\,p$ kommen also nur die Werte von $\tau\,p$ in (20) in Betracht.

Da T_5 die Gerade $x_1 = 0$ im Punkte $0 : -C : B$ schneidet, liegt dieser Punkt mit π fest, d. h. hängt nur von $p = p_2/p_3$ und von β, γ ab.

Die B und C aus (28) lassen sich wie folgt am einfachsten eliminieren. Bezeichnen wir der Kürze halber die linken Seiten von (28) mit a_{22}, a_{23} und a_{33}, so gibt die mittlere Gleichung

$$C = \frac{a_{23} - B\,c}{2\,a\,B + b}. \tag{30}$$

Dies setzen wir in die letzte Gleichung ein und erhalten

$$(c^2 + 4\,a a_{33})\,(aB^2 + bB) - a a_{23}^2 - bc a_{23} + b^2\,a_{33} = 0. \tag{31}$$

Hierzu die erste der Gleichungen (28):

$$aB^2 + bB - a_{22} = 0$$

und daher

$$c^2\,a_{22} + b^2\,a_{33} + 4\,a a_{22}\,a_{33} - a a_{23}^2 - bc a_{23} = 0, \tag{32}$$

oder, ausgeschrieben

$$c^2 \cdot 4\,p_2^2\,(\beta^3\gamma - 1) + b^2 \cdot 4\,p_3^2\,(\beta\,\gamma^3 - 1) +$$
$$+ a p_2^3\,p_3^3\,[56 + 72\beta^2\gamma^2 - 64\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)] - bc \cdot 6\,p_2\,p_3\,(\beta^2\gamma^2 - 1) = 0. \tag{32a}$$

Erfüllen umgekehrt die Größen p_2, p_3, a, b und c diese Gleichung, so gibt es zu den beiden Wurzeln B_1 und B_2 von

$$aB^2 + bB - 4\,p_2^3\,p_3\,(\beta^3\gamma - 1) = 0 \tag{33}$$

eindeutig durch (30) bestimmte Werte C_1 und C_2 mit (29), d. h. mit

$$\pi_1 = -\frac{C_1}{B_1},\quad \pi_2 = -\frac{C_2}{B_2} \tag{34}$$

wobei $\pi\,p$ eine Wurzel von (15) ist.

Ist (32) erfüllt, so erhält man zwei weitere Flachtangenten T_5 und T_6 mit

$$\begin{cases} T_5 \ldots x_1 = B_1\,(x_2 - \pi_1\,x_3) \text{ mit } F_5 \ldots -B_1\,(\beta\,p_2\pi_1 + \gamma\,p_3) : -\gamma p_3 : \beta\,p^2 \\ T_6 \ldots x_1 = B_2\,(x_2 - \pi_2\,x_3) \text{ mit } F_6 \ldots -B_2\,(\beta\,p_2\pi_2 - \gamma p_3) : -\gamma\,p_3 : \beta p_2 \end{cases}$$

T_5 und T_6 schneiden $x_1 = 0$ in den Punkten

$$S_{35} \ldots 0 : \pi_1 : 1 \text{ bzw. } S_{36} \ldots 0 : \pi_2 : 1. \tag{36}$$

F_5 und F_6 liegen mit $F_1 = F_2$ auf der Geraden $\beta p_2 x_2 + \gamma p_3 x_3 = 0$.

Ein Zahlenbeispiel für diesen Fall:

$$a = 1,\ p_2 = p_3 = 1;\ \beta = 1,\ \gamma = -1;\ b = 5,\ c = \sqrt{7}.$$

Hier ist (32) erfüllt und wir haben

$$f = (x_2 + x_3)^4 + x_1 x_2 x_3 (x_1 + 5 x_2 + \sqrt{7} x_3) = 0 \tag{37}$$

mit

$$\begin{aligned} &T_1 \ldots x_2 = 0 \\ &T_2 \ldots x_3 = 0 \\ &T_3 \ldots x_1 = 0 \qquad\qquad B_1 = \tfrac{1}{2}(-5 + i\sqrt{7}) \\ &T_4 \ldots x_1 + 5 x_2 + \sqrt{7}\, x_3 = 0 \qquad B_2 = \tfrac{1}{2}(-5 - i\sqrt{7}) \\ &T_5 \ldots x_1 - B_1 (x_2 + i x_3) = 0 \\ &T_6 \ldots x_1 - B_2 (x_2 - i x_3) = 0 \end{aligned}$$

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn (33) oder $aB^2 + bB - a_{22} = 0$ eine *Doppelwurzel* hat:

$$B_1 = B_2 = B_0 = -\frac{b}{2a},\ 2aB_0 + b = 0. \tag{38}$$

Wie haben dann:

$$b^2 + 4aa_{22} = 0,\quad b = 2\sqrt{-aa_{22}}. \tag{39}$$

Die Gleichung $(28)_2$ gibt dann $cB_0 = a_{23}$, also

$$c = -a\frac{a_{23}}{\sqrt{-aa_{22}}}. \tag{40}$$

Aus $(28)_3$ erhalten wir die beiden Werte von C:

$$C = \frac{1}{2a}(-c \pm \sqrt{c^2 + 4aa_{33}}).$$

Soll auch $C_1 = C_2$, also $C_1 = C_2 = C_0 = -\dfrac{c}{2a}$ sein, so haben wir

$$c = 2\sqrt{-aa_{33}}, \tag{41}$$

woraus sich nach (40) wegen $a \neq 0$

$$4 a_{22} a_{33} + a_{23}^2 = 0 \tag{42}$$

ergibt. Berechnen wir aber $4 a_{22} a_{33} + a_{23}^2$ nach (28) für die verschiedenen Paare β, γ nach Tebelle (19), so erhalten wir $\neq 0$, d. h. der Fall $T_5 = T_6$ ist nicht möglich.

Entsprechend den möglichen Wertepaaren β, γ, die in Tabelle (19) zusammengestellt sind und den Verteilungen der W_i und W_i' auf drei, durch W_1, W_2 und W_3 vertretene Klassen entsprechen, erhalten wir bei (32a):

$$\begin{cases} (W_1)^* = c^2 p_2^2 + b^2 p_3^2 - 32 p_2^3 p_3^3 = 0 \\ (W_2)^* = c^2 p_2^2 (i-1) - b^2 p_3^2 (i+1) - 4 a p_2^3 p_3^3 + 3 bc p_2 p_3 = 0 \\ (W_3)^* = -c^2 p_2^2 (i+1) + b^2 p_3^2 (i-1) - 4 a p_2^3 p_3^3 + 3 bc p_2 p_3 = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Den drei Klassen entsprechend erhalten wir zur Bestimmung von B statt (33):

$$\begin{cases} B_{w_1} \ldots a B^2 + bB + 8 p_2^3 p_3 = 0 \\ B_{w_2} \ldots a B^2 + bB - 4 (i-1) p_2^3 p_3 = 0 \\ B_{w_3} \ldots a B^2 + bB + 4 (i+1) p_2^3 p_3 = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Sie zeigen, daß (wegen $p_2 p_3 \neq 0$) kein B der einen Klasse mit einem B einer anderen Klasse identisch sein kann.

Erfüllen die Größen p_2, p_3, a, b und c die erste der Gleichungen (43), so gibt $(44)_1$

$$B_{1,2} = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 32 a p_2^3 p_3}) = \frac{1}{2a} (-b \pm i \frac{c p_2}{p_3}) \quad (45a)$$

und hiermit gibt (30) für die zugehörigen Werte der C_i:

$$C_{1,2} = \frac{1}{2a} (-c \mp bi \frac{p_3}{p_2}). \quad (46a)$$

T_5 und T_6 sind gegeben durch

$$T_{5,6} \ldots x_1 - B_i x_2 - C_i x_3 = x_1 - \frac{1}{2a} (-b \pm ci \frac{p_2}{p_3}) x_2 - \\ - \frac{1}{2a} (-c \mp bi \frac{p_3}{p_2}) x_3 = 0. \quad (47a)$$

F_5 und F_6 werden nach (21) für $\beta = 1, \gamma = -1$:

$$F_{5,6} \ldots - \frac{1}{2a} [(cp_2 + bp_3) \mp i (cp_2 - bp_3)] : p_3 : p_2. \quad (48a)$$

Sie liegen auf der Geraden

$$p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0. \quad (49a)$$

Gilt $(43)_2$, so erhalten wir auf dieselbe Weise aus $(44)_2$

$$B_{1,2} = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 + 16 (i-1) a p_2^3 p_3}) \quad (45b)$$

und hieraus nach (30) mit $a_{23} = -12\,p_2^2\,p_3^2$:

$$C = \frac{-12\,p_2^2\,p_3^2 - Bc}{12\,a\,B + b}. \tag{46b}$$

T_5 und T_6 werden wieder gegeben durch

$$T_{5,6} = x_1 - B_{1,2}\,x_2 - C_{1,2}\,x_3 = 0; \tag{47b}$$

die Flachpunkte F_5 und F_6 haben die Koordinaten

$$F_{5,6} \ldots (p_2\,C_{1,2} - i\,p_3\,B_{1,2}) : -ip_3 : p_2. \tag{48b}$$

Sie liegen auf der Geraden

$$p_2\,x_2 + ip_3\,x_3 = 0. \tag{49b}$$

Wenn die letzte der Gleichungen (43) gilt, erhält man analoge Werte für die B_r und C_s; man hat in den Formeln (45b) bis (49b) i durch $-i$ zu ersetzen. So wird also z. B. bei $(W_3)^*$

$$p_2\,x_2 - ip_3\,x_3 = 0 \tag{49c}$$

die Gleichung der Geraden $F_5\,F_6$.

Wir kommen nun zu den Fällen $(W_{rs})^*$ in denen gleichzeitig $(W_r)^* = 0$ und $(W_s)^* = 0$ gilt. Es sind dann zwei von den drei Gleichungen (43) gleichzeitig erfüllt und wir erhalten neben T_5 und T_6 zwei weitere Flachtangenten T_7 und T_8.

Bei $(W_{23})^*$ ergibt sich

$$c^2\,p_2^2 = b^2\,p_3^2, \tag{50}$$

wir haben also die beiden Möglichkeiten

$$W_{23}' \ldots cp_2 = bp_3 \text{ und } W_{23}'' \ldots cp_2 = -bp_3. \tag{51}$$

W_{23}' gibt somit nach (45b):

$$\begin{cases} B_5' = \dfrac{1}{2a}\,(-b + \sqrt{b^2 + 16\,(i-1)\,ap_2^3\,p_3}) \\ B_6' = \dfrac{1}{2a}\,(-b - \sqrt{b^2 + 16\,(i-1)\,ap_2^3\,p_3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_7' = \dfrac{1}{2a}\,(-b + \sqrt{b^2 - 16\,(i+1)\,ap_2^3\,p_3}) \\ B_8' = \dfrac{1}{2a}\,(-b - \sqrt{b^2 - 16\,(i+1)\,ap_2^3\,p_3}) \end{cases} \tag{52}$$

mit $cp_2 = bp_3$; dieselben Ausdrücke erhalten wir für B_5'', B_6'', B_7'' und B_8'', wenn $cp_2 = -bp_3$ gilt. Die zu diesen B_r gehörigen Werte von C gibt wieder die Formel (46b).

Bei $(W_{12})^*$ gelten die beiden ersten Gleichungen (43). Elimination von a gibt

$$c^2 p_2^2 (8i - 9) - b^2 p_3^2 (8i + 9) + 24 bc p_2 p_3 = 0,$$

d. h., wenn wir

$$\frac{c p_2}{b p_3} = q, \quad cp_2 = q \cdot bp_3 \tag{53}$$

setzen:

$$q_1 = -\frac{87i + 116}{145} \text{ und } q_2 = -\frac{105i + 100}{145}. \tag{54}$$

Wir haben bei $(W_{12})^*$ also wieder zwei Möglichkeiten:

$$W_{12}' \ldots cp_2 = q_1 \cdot bp_3 \text{ und } W_{12}'' \ldots cp_2 = q_2 \cdot bp_3. \tag{55}$$

Sie ergeben nach (45a) für T_5 und T_6:

$$\left\{\begin{array}{ll} W_{12}' \ldots B_5' = -\frac{b}{2a}(1 - iq_1) & B_6' = -\frac{b}{2a}(1 + iq_1) \\ W_{12}'' \ldots B_5'' = -\frac{b}{2a}(1 - iq_2) & B_6'' = -\frac{b}{2a}(1 + iq_2) \end{array}\right. \tag{56}$$

Die hierzugehörigen C_r folgen aus (30) mit $a_{23} = 0$, also aus

$$C = \frac{-Bc}{2aB + b}. \tag{57}$$

Für T_7 und T_8 dagegen haben wir entsprechend den beiden Fällen (55) nach (45b):

$$\begin{aligned} W_{12}' \ldots B_7' &= \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 + 16(i-1) a p_2^3 p_3}\right) \\ B_8' &= \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 + 16(i-1) a p_2^3 p_3}\right), \end{aligned} \tag{58}$$

mit $cp_2 = q_1 \cdot bp_3$ und W_{12}'' mit B_7'' und B_8'', durch die gleichen Formeln gegeben, aber jetzt mit $cp_2 = q_2 \cdot bp_3$. Die zugehörigen Werte der C_r' und C_s'' folgen wieder aus (46b).

Den Fall $(W_{13})^*$ erhalten wir aus $(W_{12})^*$ indem wir in den Formeln (56) und (58) i durch $-i$ ersetzen, wobei das in den q_r auftretende i unverändert bleibt.

Aus (50) folgt $\frac{c^2 p_2^2}{b^2 p_3^2} = 1$, aus (53) hingegen $\frac{c^2 p_2^2}{b^2 p_3^2} = q \neq 1$, d. h. es

gibt keinen Fall $(W_{123})^*$, bei dem *alle drei* Gleichungen (43) gleichzeitig gelten. Man hat also höchstens acht Flachtangenten. *Hiermit sind alle Fälle aufgezählt, in denen die C_4 einen Doppelflachpunkt besitzt.*

§ 5. Vier T_i durch einen Punkt.

Wenn die C_4 zwei Flachtangenten $T_1 = x_2 = 0$ und $T_2 = x_3 = 0$ hat, die sich im Punkte $P_1(1:0:0)$ schneiden, so kann man $F_1 \neq P_1$ und $F_2 \neq P_1$ voraussetzen. Nimmt man dann $x_1 = 0$ als Gerade $F_1 F_2$, so bekommt f die Gestalt

$$f = f_{12} = x_1^4 + 4gx_2^3x_3 + 6kx_2^2x_3^2 + 4hx_2x_3^3 + 12x_1x_2x_3(ax_1 + bx_2 + cx_3). \quad (59)$$

Soll eine *dritte Flachtangente* T_3 durch P_1 gehen, $x_2 = \lambda x_3$ $(\lambda \neq 0)$, so haben wir

$$(f_{12})_{x_2=\lambda x_3} = (\beta x_1 + \tau x_3)^4, \ \beta^4 = 1.$$

Koeffizientenvergleichung gibt:

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta^4 = 1 & \\ 4\beta^3\tau = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ hieraus } \tau = 0, \text{ also} \\ 6\beta^2\tau^2 = 12a & \ldots\ldots\ldots\ldots a = 0, \text{ also} \\ 4\beta\tau^3 = 12(b+c) & \ldots\ldots b\lambda + c = 0 \text{ und} \\ \tau^4 = (4g + 6k + 4h). & 4g\lambda^2 + 4k\lambda + 4h = 0. \end{array}\right. \quad (60)$$

Die letzten zwei Gleichungen geben das Resultat, daß

$$x_2 - \lambda x_3 = \frac{1}{b}(bx_2 + cx_3)$$

ist und daß $4gx_2^3x_3 + 6kx_2^2x_3^2 + 4hx_2x_3^3$ durch $bx_2 + cx_3$ teilbar ist. Dies gibt schließlich für f die Gestalt

$$f = f_{123} = x_1^4 + 12x_2x_3(x_2 - \lambda x_3)(ax_1 + bx_2 + cx_3). \quad (61)$$

Hier kann λ auch Null sein; der Fall $\lambda = \infty$ gibt nur Vertauschung von x_2 mit x_3. (61) zeigt, daß das Vorhandensein einer T_3 durch P_1 eine T_4 mit der Gleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad (62)$$

nach sich zieht und daß die vier zugehörigen Flachpunkte F_1, F_2, F_3 und F_4 auf derselben Geraden $(x_1 = 0)$ liegen.

Die Forderung einer vierten Flachtangente T_4 durch P_1 gibt aus (61) die Bedingung $a = 0$ und f erhält die Gestalt

$$f = f_{1234} = x_1^4 + 12mx_2x_3(x_2 - \lambda x_3)(x_2 - \mu x_3) \quad (63)$$

und eine T_5 durch P_1 gäbe $m = 0$, also das Zerfallen der C_4. In (63)

kann $\lambda = \mu$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ sein. Den Fall $\lambda = 0$, $\mu = \infty$ können wir ausschließen, da $x_1^4 + 12 m x_2^2 x_3^2$ in Faktoren zerfällt.

Eine T_5, die nicht durch P_1 geht, also die Gleichung

$$T_5 \ldots x_1 = B x_2 + C x_3 \tag{64}$$

hat, gibt bei f_{1234} von (63):

$$(f_{1234})_{x_1} = B x_2 + C x_3 = (\beta\, B x_2 + \gamma\, C x_3)^4 \text{ mit } \beta^4 = \gamma^4 = 1.$$

Also haben wir wieder:

$$\left\{\begin{array}{l} B^3 C\ (\beta^3 \gamma - 1) = 3 m \\ B^2 C^2 (\beta^2 \gamma^2 - 1) = -2 m (\lambda + \mu) \\ B\ C^3 (\beta\ \gamma^3 - 1) = 3 m\, \lambda\mu. \end{array}\right. \tag{65}$$

Wegen $m \neq 0$ können wir $\beta \neq \gamma$ voraussetzen, ebenso $B \neq 0$ und $C \neq 0$. Denn wäre z. B. $B = 0$, so würde T_5 durch $P_2 = F_2$ gehen, wir hätten also einen Doppelflachpunkt. Daher gilt in (65) auch $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$.

Die Elimination der B, C aus (65) gibt

$$\lambda^2 \,.\, 4(\beta^3\gamma - 1)(\beta\gamma^3 - 1) + \lambda\mu \,.\, [8(\beta^3\gamma - 1)(\beta\gamma^3 - 1) - 9(\beta^2\gamma^2 - 1)^2] + \\ + \mu^2 \,.\, 4(\beta^3\gamma - 1)(\beta\gamma^3 - 1) = 0. \tag{66}$$

Hieraus findet man

$$\lambda = \tau\, \mu \tag{67}$$

mit

$$\tau = \frac{1}{8(\beta^3\gamma - 1)(\beta\gamma^3 - 1)} \{9(\beta^2\gamma^2 - 1)^2 - 8(\beta^3\gamma - 1)(\beta\gamma^3 - 1) \pm \\ \pm 3(\beta^2\gamma^2 - 1)\sqrt{9(\beta^2\gamma^2 - 1)^2 - 16(\beta^3\gamma - 1)(\beta\gamma^3 - 1)}\}. \tag{68}$$

Den verschiedenen Paaren β, γ entsprechend finden wir dann nach Tabelle (19) für τ die Worte:

$$\left\{\begin{array}{ll} W_1 \text{ mit } \beta = 1,\ \gamma = -1 & \ldots\ldots\ \tau_1 = \tau_2 = -1 \\ W_2 \text{ mit } \beta = 1,\ \gamma = i \\ W_3 \text{ mit } \beta = 1,\ \gamma = -i & \ldots\ldots\ \tau_1 = 2,\ \tau_2 = \tfrac{1}{2}. \end{array}\right. \tag{69}$$

Nach (63) gibt dies also die drei Typen für f:

$$\left\{\begin{array}{lll} (f_{1234})_{w_1} & = & x_1^4 + 12 m x_2 x_3 (x_2^2 - \mu^2 x_3^2) \\ (f_{1234})_{w_2, w_3} & = & \left\{\begin{array}{l} x_1^4 + 12 m x_2 x_3 (x_2 - 2\mu x_3)(x_2 - \mu x_3) \\ x_1^4 + 12 m x_2 x_3 (x_2 - \tfrac{1}{2}\mu x_3)(x_2 - \mu x_3) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{70}$$

und statt (65) kommt mit $\tau \neq 0$:

$$\begin{cases} B^3\,C\,(\beta^3\gamma - 1) = 3\,m \\ B^2\,C^2\,(\beta^2\gamma^2 - 1) = -2\,m\,(1+\tau)\,\mu \\ B\,C^3\,(\beta\,\gamma^3 - 1) = 3\,m\,\tau\,\mu^2 \end{cases} \qquad (\beta \neq \gamma),\ (m\,\mu\,\tau \neq 0). \tag{71}$$

Das Doppelverhältnis der vier durch P_1 gehenden Flachtangenten ist nach (69) gleich -1, 2 oder $\frac{1}{2}$, d. h. sie bilden ein harmonisch liegendes Quadrupel und die drei Fälle W_i von (69) sind projektiv-äquivalent, da das genannte Doppelverhältnis gerade diese drei Werte -1, 2 und $\frac{1}{2}$ gibt, je nach der Anordnung der vier Geraden. Es genügt daher, wenn wir uns weiterhin auf die erste der Gleichungen (70) beschränken und demgemäß nach (71) von den beiden Gleichungen ausgehen

$$B^3\,C = -\frac{3\,m}{2},\quad BC^3 = \frac{3\,m}{2}\,\mu^2. \tag{72}$$

Hieraus finden wir acht Paare von zusammengehörigen Werten B, C; ist

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} \qquad (\varepsilon^{16} = 1,\ \varepsilon^8 = -1) \tag{73}$$

eine primitive sechzehnte Einheitswurzel, so erhält man:

$$B_{(r)} = g\,\varepsilon^r = \sqrt[4]{\frac{3\,m}{2\,\mu}}\cdot\varepsilon^r,\quad C_{(r)} = h\cdot\varepsilon^{5r} = \sqrt[4]{\frac{3\,m\,\mu^3}{2}}\cdot\varepsilon^{5r}$$
$$(r = 1, 3, 5, \ldots, 15). \tag{74}$$

Es ist dann

$$T_{(r)}\ldots x_1 - B_{(r)}\,x_2 - C_{(r)}\,x_3 = 0 \tag{75}$$

eine Flachtangente und man zeigt leicht, daß

$$T_{(1)},\ T_{(5)},\ T_{(9)},\ T_{(13)} \text{ und } T_{(3)},\ T_{(7)},\ T_{(11)},\ T_{(15)} \tag{76}$$

zwei Quadrupel mit zwei auf $x_1 = 0$ liegenden Scheiteln bilden.

Setzen wir jetzt, zu neuen Koordinaten X_i übergehend,

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = g x_2\,\varepsilon + h x_3\,\varepsilon^5, \\ X_3 = g x_2\,\varepsilon^3 + h x_3\,\varepsilon^{15} \end{cases} \tag{77}$$

so erhält man nach (74) und $(70)_1$:

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0. \tag{78}$$

Dies ist die *Normalform der C_4 mit zwölf Flachtangenten.*

Zusammenfassend haben wir:

Gehen vier Flachtangenten durch einen Punkt P_1, so hat die C_4 die Gleichung (63). Soll eine T_5 existieren, die nicht durch P_1 geht, so gibt

es acht weitere Flachtangenten und die C_4 läßt sich in der Gestalt (78) schreiben. Die zugehörigen 12 Flachpunkte liegen zu je vieren auf drei Geraden.

§ 6. Drei T_4 durch einen Punkt.

Wir gehen jetzt von Gleichung (61) aus:

$$f = f_{123} = x_1^4 + 12\, x_2\, x_3\, (x_2 - \lambda\, x_3)\, (a x_1 + b x_2 + c x_3) \qquad (61)$$

und setzen voraus, daß keine weitere Flachtangente durch P_1 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) geht, daß also genau drei Flachtangenten durch P_1 gehen. Dies gibt $a \neq 0$. Auch $\lambda \neq 0$ können wir voraussetzen, da sonst $x_2 = 0$ eine doppelt zu zählende Flachtangente, der Punkt P_3 $(0:0:1)$ also ein Doppelflachpunkt wäre.

Die C_4 von (61) hat also drei Flachtangenten T_1 $(x_2 = 0)$, T_2 $(x_3 = 0)$, T_3 $(x_2 = \lambda\, x_3)$ durch P_1 und eine T_4 $(a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0)$, die nicht durch P_1 geht. Schreiben wir diese T_4 in der Gestalt

$$T_4 \ldots x_1 = B_4\, x_2 + C_4\, x_3 \qquad (B_4 \neq 0,\ \ C_4 \neq 0), \qquad (79)$$

so können wir in (61) andere Konstanten einführen und die C_4 in folgender Form voraussetzen:

$$f_{123} = x_1^4 + 12\, m x_2\, x_3\, (x_2 - \lambda x_3)\, (x_1 - B_4\, x_2 - C_4\, x_3) \text{ mit } m B_4\, C_4\, \lambda \neq 0. \qquad (80)$$

Die Annahme einer weiteren *fünften* Flachtangente $x_1 = B x_2 + C x_3$ führt wieder zu

$$(B x_2 + C x_3)^4 + 12\, m x_2\, x_3\ (x_2 - \lambda\, x_3)\ [(B - B_4)\, x_2 + (C - C_4)\, x_3] = \\ = (\beta\, B x_2 + \gamma\, C x_3)^4,$$

also zu den Gleichungen

$$(G) \ldots \begin{cases} B^3 C\ (\beta^3 \gamma - 1) = 3 m (B - B_4) = 3 m B' \\ B\ C^3 (\beta\, \gamma^3 - 1) = -3 m \lambda (C - C_4) = -3 m \lambda C', \ (B B' C C' \neq 0) \\ B^2 C^2 (\beta^2 \gamma^2 - 1) = 2 m \lambda (B - B_4) + 2 m (C - C_4) = -2 m \lambda B' + 2 m C' \end{cases} \qquad (81)$$

Dies sind drei Gleichungen für B und C; die Elimination dieser Größen muß also zu einer Beziehung zwischen m, λ, B_4 und C_4 führen, die notwendig ist für die Existenz einer T_5.

Wir können wieder $\beta \neq \gamma$ voraussetzen, da sonst $m = 0$ oder $\lambda = 0$ oder $T_5 = T_4$ folgen würde.

Aus (81) ergeben sich die beiden Beziehungen

$$(G_1) \ldots 4 \lambda^2 (\beta^3 \gamma - 1)(\beta \gamma^3 - 1)\, B'^2 - \lambda B'\, C' [8 (\beta^3 \gamma - 1)(\beta \gamma^3 - 1) - 9 (\beta^2 \gamma^2 - 1)^2] + \\ + 4\, (\beta^3\, \gamma - 1)\, (\beta\, \gamma^3 - 1)\, C'^2 = 0 \qquad (82)$$

mit $B' = B - B_4$ und $C' = C - C_4$ und

$$(G_2) \ldots 2(\beta^3\gamma - 1)\lambda^2 B^2 + 3(\beta^2\gamma^2 - 1)\lambda BC + 2(\beta\gamma^3 - 1)C^2 = 0. \quad (83)$$

(82) entsteht aus (81) durch Elimination der B und C auf den linken Seiten; (83) dagegen durch Elimination der B' und C'.

Man sieht leicht, daß sich bei den möglichen 12 Paaren β, γ für die Koeffizienten von (82) und (83) wieder die drei Klassen ergeben, die wir schon durch (22a) angedeutet haben und die durch W_1, W_2 und W_3 der Tabelle (19) vertreten werden.

(82) ist eine quadratische Gleichung für

$$\frac{\lambda B'}{C'} = \frac{1}{\nu}; \quad (84)$$

(83) ist eine quadratische Gleichung für

$$\frac{\lambda B}{C} = \frac{1}{\mu}. \quad (85)$$

Hieraus finden wir $\nu\lambda B' = C'$ oder $\nu\lambda(B - B_4) = C - C_4$ und $\mu\lambda B = C$; also:

$$\lambda B = \frac{\nu\lambda B_4 - C_4}{\nu - \mu},\ C = \mu\frac{\nu\lambda B_4 - C_4}{\nu - \mu},\ \lambda B' = \frac{\mu\lambda B_4 - C_4}{\nu - \mu}. \quad (86)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in $(81)_1$ ein, so folgt

$$m = \frac{\mu}{3\lambda^2(\lambda - \mu)^3} \cdot \frac{(\nu\lambda B_4 - C_4)^4}{\mu\lambda B_4 - C_4} \cdot (\beta^3\gamma - 1). \quad (87)$$

Gilt umgekehrt bei bestimmter Wahl von β und γ zwischen m, λ, B_4 und C_4 diese Beziehung, so folgen die Gleichungen (81) und die durch (86) dargestellten B, C *geben eine fünfte Flachtangente.*

Wir beschauen nun der Reihe nach die drei Klassen W_1, W_2 und W_3 (vgl. die Tabelle (19)). Bei W_1 ergeben sich aus (83) für $1/\mu$ die beiden Werte $+i$ und $-i$; dasselbe gilt also für μ. Aus (82) findet man bei W_1 für ν den Wert $+1$. Damit haben wir bei W_1:

$$m_{w_1} = -\frac{2\mu}{3\lambda^2(\nu - \mu)^3} \cdot \frac{(\nu\lambda B_4 - C_4)^4}{\mu\lambda B_4 - C_4} \text{ mit } \mu = +i, -i \text{ und } \nu = +1. \quad (88)$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir:

$$m_{w_2} = \frac{(i-1)\mu}{3\lambda^2(\nu - \mu)^3} \cdot \frac{(\nu\lambda B_4 - C_4)^4}{\mu\lambda B_4 - C_4} \text{ mit } \mu = -(i+1),\ -\tfrac{1}{2}(i+1)$$
$$\text{und } \nu = -2,\ -\tfrac{1}{2}; \quad (89)$$

$$m_{w_3} = -\frac{(i+1)\,\mu}{3\,\lambda^2\,(\nu-\mu)^3} \cdot \frac{(\nu\,\lambda\,B_4-C_4)^4}{\mu\,\lambda\,B_4-C_4} \text{ mit } \mu = i-1,\ \tfrac{1}{2}(i-1)$$

$$\text{und } \nu = -2,\ -\tfrac{1}{2}. \tag{90}$$

Die Existenz einer fünften Flachtangente T_5 fordert das Bestehen der Gleichung (87). Soll es eine *sechste* Flachtangente T_6 geben, zu der β', γ', μ' und ν' gehören, so muß (87) auch mit diesen Werten gelten, d. h. es muß auch

$$m = m' = \frac{\mu'}{3\,\lambda^2(\nu'-\mu')^3} \cdot \frac{(\nu'\,\lambda\,B_4-C_4)^4}{\mu'\,\lambda\,B_4-C_4}\,(\beta'^3\,\gamma'-1)$$

sein. Dies gibt dann, wenn wir

$$\frac{\lambda\,B_4}{C_4} = \frac{1}{\tau} \text{ oder } C_4 = \tau\,\lambda\,B_4 \tag{91}$$

setzen, für τ die Gleichung

$$\left(\frac{\tau-\nu}{\tau-\nu'}\right)^4 \frac{\tau-\mu'}{\tau-\mu}\,\frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{\nu'-\mu'}{\nu-\mu}\right)^3 \frac{\beta^3\,\gamma-1}{\beta'^3\,\gamma'-1} = 1. \tag{92}$$

Dies ist *eine* Gleichung für $\tau = \dfrac{C_4}{\lambda\,B_4}$. Ist sie erfüllt, so haben wir

$$m = m' = \frac{\mu\,\lambda\,B_4^3}{3\,(\nu-\mu)^3}\,\frac{(\nu-\tau)^4}{\mu-\tau}\,(\beta^3\,\gamma-1) \tag{93}$$

und in der Gleichung der Kurve C_4 sind nur noch λ und B_4 frei wählbar. T_4 erscheint dann wegen $C_4 = \tau\,\lambda\,B_4$ in der Gestalt

$$x_1 = B_4\,(x_2 + \lambda\,\tau\,x_3), \tag{94}$$

während T_5 und T_6 gegeben sind durch

$$\begin{cases} T_5 \ldots x_1 = B_4\,\dfrac{\nu-\tau}{\nu-\mu}\,(x_2 + \mu\,\lambda\,x_3) \\ T_6 \ldots x_1 = B_4\,\dfrac{\nu'-\tau}{\nu'-\mu'}\,(x_2 + \mu'\,\lambda\,x_3). \end{cases} \tag{95}$$

Wir zählen noch die verschiedenen m-Werte (88) bis (90) auf, durch deren paarweise Gleichsetzung die Gleichung (92) für τ entsteht.

Aus (88) haben wir:

$$\begin{cases} (m_{11})_{w_1} = \dfrac{i+1}{6\,\lambda^2} \cdot \dfrac{(\lambda\,B_4-C_4)^4}{i\,\lambda\,B_4-C_4} \text{ mit } \mu=i,\ \nu=1;\ \beta^3\gamma-1=-2 \\ (m_{21})_{w_1} = \dfrac{i-1}{6\,\lambda^2} \cdot \dfrac{(\lambda\,B_4-C_4)^4}{i\,\lambda\,B_4+C_4} \text{ mit } \mu=-i,\ \nu=1;\beta^3\gamma-1=-2 \end{cases} \tag{96}$$

Aus (89) ergeben sich vier Ausdrücke:

$$\begin{cases} (m_{11})_{w_2} = \dfrac{i-1}{6\lambda^2} \cdot \dfrac{(2\lambda B_4+C_4)^4}{(i+1)\lambda B_4+C_4} \text{ mit } \mu=-(i+1), \nu=-2;\ \beta^3\gamma-1=i-1 \\ (m_{12})_{w_2} = -\dfrac{2}{3\lambda^2(i+\frac{1}{2})^3} \cdot \dfrac{(\frac{1}{2}\lambda B_4+C_4)^4}{(i+1)\,\lambda\, B_4+C_4} \text{ mit } \mu=-(i+1),\ \nu=-\tfrac{1}{2};\\ \qquad\qquad \beta^3\gamma-1=i-1 \\ (m_{21})_{w_2} = -\dfrac{16}{3\lambda^2(i-3)^3} \cdot \dfrac{(2\lambda B_4+C_4)^4}{\frac{1}{2}(i+1)\,\lambda\, B_4+C_4} \text{ mit } \mu=-\tfrac{1}{2}(i+1),\ \nu=-2;\\ \qquad\qquad \beta^3\gamma-1=i-1 \\ (m_{22})_{w_2} = -\dfrac{8i}{3\lambda^2} \cdot \dfrac{(\frac{1}{2}\lambda B_4+C_4)^4}{\frac{1}{2}(i+1)\,\lambda\, B_4+C_4} \text{ mit } \mu=-\tfrac{1}{2}(i+1),\ \nu=-\tfrac{1}{2};\\ \qquad\qquad \beta^3\gamma-1=i-1 \end{cases} \tag{97}$$

Die entsprechenden $(m_{ik})_{w_2}$ erhält man hieraus durch i durch $-i$ zu ersetzen.

Für die Existenz einer siebenten Flachtangente ist notwendig, daß sich aus zwei verschiedenen der 25 möglichen Gleichungen (92) derselbe Wert von τ ergibt. Man rechnet mit einiger Mühe nach, daß dies nicht der Fall ist. *Es können hier deshalb höchstens sechs Flachtangenten vorkommen, wobei drei derselben durch denselben Punkt gehen.*

§ 7. Keine drei T_i durch einen Punkt.

Wenn T_1, T_2, T_3 ein Dreieck bilden, das wir als Koordinatendreieck nehmen, so haben wir

$$\begin{aligned} f = {} & q_1^4x_1^4+r_2^4x_2^4+p_3^4x_3^4 \\ & +4q_3^3q_1x_3^3x_1+4q_1^3q_3x_1^3x_3 \\ & +4r_1^3r_2x_1^3x_2+4r_1r_2^3x_1x_2^3 \\ & +4p_2^3p_3x_2^3x_3+4p_2p_3^3x_2x_3^3 \\ & +6(p_2^2p_3^2x_2^2x_3^2+q_3^2q_1^2x_3^2x_1^2+r_1^2r_2^2x_1^2x_2^2)+ \\ & +12x_1x_2x_3\,(ax_1+bx_2+cx_3) \end{aligned} \tag{98}$$

wobei $p_2^4 = r_2^4$, $p_3^4 = q_3^4$, $r_1^4 = q_1^4$ oder

$$q_3 = \delta\, p_3,\ r_1 = \varepsilon\, q_1,\ p_2 = \eta\, r_2 \tag{99}$$

ist mit $\delta^4 = \varepsilon^4 = \eta^4 = 1$.

Die drei Flachtangente F_i sind dannn gegeben durch

$$\begin{cases} F_1 \ldots & 0 : -p_3 : p_2 = & 0 : & -p_3 : p_2 \\ F_2 \ldots & -q_3 : 0 : q_1 = & -\delta\, p_3 : & 0 : q_1 \\ F_3 \ldots & r_2 : -r_1 : 0 = & \eta^3\, p_2 : & -\varepsilon\, q_1 : 0 \end{cases} \tag{100}$$

Aus (98) folgt, daß bei einer allgemeinen C_4 die Vorgabe eines Flachpunktes mit zugehöriger Flachtangente äquivalent ist mit *vier* Bedingungen, d. h. es gibt $\infty^{10} C_4$ mit einem gegebenen Flachelement $F + T$. Weiters: es gibt $\infty^3 C_4$ mit demselben Dreieck T_1, T_2, T_3 und denselben zugehörigen Flachpunkten F_i.

Die drei F_i von (100) liegen auf einer Geraden, wenn

$$\Delta_1 = p_2 p_3 q_1 (\varepsilon \delta - \eta^3) = 0$$

ist, d. h. also für

$$\delta \varepsilon \eta = 1. \tag{101}$$

Die Verbindungslinien $F_i P_i$ gehen durch einen Punkt, wenn

$$\delta \varepsilon \eta = -1 \tag{102}$$

ist.

Nun sei

$$T_4 \ldots U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 = 0 \text{ oder } x_1 = B x_2 + C x_3 \tag{103}$$

mit $B = -\dfrac{U_2}{U_1}$, $C = -\dfrac{U_3}{U_1}$ eine vierte Flachtangente, die durch keinen der Eckpunkte P_i des Koordinatendreieckes geht, wobei also $U_i \neq 0$, $B \neq 0$ und $C \neq 0$ gilt. Setzen wir $x_1 = B x_2 + C x_3$ in (98) ein, so muß f die Gestalt $(\sigma x_2 + \tau x_3)^4$ annehmen. Gleichsetzen der Koeffizienten der Potenzprodukte in x_2 und x_3 gibt zunächst bei x_2^4 und x_3^4 wegen (99):

$$\sigma^4 = (r_1 B + r_2)^4, \quad \tau^4 = (q_1 C + q_3)^4. \tag{104}$$

Ist daher $\beta^4 = \gamma^4 = 1$, so haben wir

$$\sigma = \beta (r_1 B + r_2), \quad \tau = \gamma (q_1 C + q_3), \tag{105}$$

oder, nach (99), auch

$$\sigma = \beta (\varepsilon q_1 B + \eta^3 p_2), \quad \tau = \gamma (q_1 C + \delta p_3), \tag{106}$$

so daß also

$$(\sigma x_2 + \tau x_3) = \beta (B r_1 + r_2) x_2 + \gamma (C q_1 + q_3) x_3 = \Lambda_1 \tag{107}$$

wird. Das Gleichsetzen der übrigen Koeffizienten in $\Lambda_1^4 = (f)_{x_1 = B x_2 + C x_3}$ gibt:

$$\begin{cases} 12\, a B^2 + 12\, b B & = H_{22} \\ 12\, a C^2 & + 12\, c C = H_{33} \\ 24\, a B C + 12\, b C + 12\, c B & = H_{23} \end{cases} \tag{108}$$

wobei die H_{rs} gegeben sind durch:

$$\begin{cases} H_{22}=4\beta^3\gamma\,(Br_1+r_2)^3(Cq_1+q_3) -4B^3q_1^3(Cq_1+q_3)-12BCr_1^2r_2(Br_1+r_2)- \\ \qquad -4p_2^3p_3-4Cr_1r_2^3 \\ H_{33}=4\beta\,\gamma^3(Br_1+r_2)(Cq_1+q_3)^3-4C^3r_1^3(Br_1+r_2)-12BCq_3q_1^2(Cq_1+q_3)- \\ \qquad -4p_2p_3^3-4Bq_1q_3^3 \\ H_{23}=6\beta^2\gamma^2(Br_1+r_2)^2(Cq_1+q_3)^2-6B^2C^2q_1^4-6p_2^2p_3^2-12B^2Cq_3q_1^3- \\ \qquad -12BC^2r_1^3r_2-6B^2q_3^2q_1^2-6C^2r_1^2r_2^2 \end{cases} \tag{109}$$

Für die Kurve vierter Ordnung C_4, wofür B und C nach (103) eine T_4 bestimmen, findet man also a, b und c aus den Gleichungen (108). Da die Koeffizientendeterminante links Null ist, haben diese Gleichungen dann und nur dann eine Lösung, wenn

$$\Omega = C^2 H_{22} + B^2 H_{33} - BCH_{23} = 0. \tag{110}$$

Dies gibt für veränderliche B, C eine (zerfallende) Kurve sechster Klasse, der die T_4 angehören muß. Die drei Seiten $x_i = 0$ des Koordinatendreieckes, also die Flachtangenten T_1, T_2 und T_3 sind Doppellinien von Ω.

Lassen wir T_4 durch $B \to 0$, $C \to 0$ stetig in T_1 ($x_1 = 0$) übergehen, so werden nach (108) die H_{rs} zu Null. Die Gleichungen (109) geben dann, da bei diesem Übergang β und γ konstant bleiben:

$$\begin{cases} \beta^3\gamma\ r_2^3 q_3 - p_2^3 p_3 = 0 \\ \beta\ \gamma^3 r_2 q_3^3 - p_2 p_3^3 = 0 \quad \text{oder nach (99):} \\ \beta^2\gamma^2 r_2^2 q_3^3 - p_2^2 p_3^3 = 0 \end{cases}$$

$$\beta^3\gamma\,\delta - \eta^3 = 0,\ \beta\gamma^3\delta^3 - \eta = 0 \text{ und } \beta^2\gamma^2\delta^2 - \eta^2 = 0.$$

Dies ist äquivalent mit *einer* Beziehung:

$$\beta = \gamma\,\delta\eta. \tag{111}$$

Den zu T_4 gehörigen Flachpunkt F_4 finden wir aus

$$F_4 \ldots \left\| \begin{matrix} 1 & -B & -C \\ 0 & \beta(r_1 B + r_2) & \gamma(q_1 C + q_3) \end{matrix} \right\| \tag{112}$$

und (111) zeigt, daß F_4 von β und γ unabhängig ist.

In (112) ist F_4 bestimmt als Schnittpunkt von $x_1 = Bx_2 + Cx_3$ mit der durch (107) gegebenen Geraden $\Lambda_1 = 0$. Dabei entsteht Λ_1 aus

$$(f)_{x_1=Bx_2+Cx_3} = [\beta(Br_1 + r_2)\,x_2 + \gamma(Cq_1 + q_3)\,x_3]^4 = \Lambda_1^4. \tag{113}$$

Nehmen wir T_4 in der Gestalt

$$x_2 = \frac{1}{B}\,x_1 - \frac{C}{B}\,x_3 \text{ oder } x_3 = \frac{1}{C}\,x_1 - \frac{B}{C}\,x_2 \tag{114}$$

an und bestimmen

$$\left\{\begin{array}{l}(f)_{x_3=\frac{1}{B}x_1-\frac{C}{B}x_3}=\left[\alpha'\,\dfrac{Br_1+r_2}{B}\,x_1+\gamma'\,\dfrac{p_3B-p_2C}{B}\,x_3\right]^4=\Lambda_2^4 \quad \text{bzw.}\\ (f)_{x_3=\frac{1}{C}x_1-\frac{B}{C}x_3}=\left[\alpha''\,\dfrac{Cq_1+q_3}{C}\,x_1-\beta''\,\dfrac{p_3B-p_2C}{C}\,x_2\right]^4=\Lambda_3^4,\end{array}\right. \tag{115}$$

so erhalten wir analog zu (111):

$$\gamma'=\alpha'\,\delta\,\varepsilon,\quad \alpha''=\beta''\,\eta\,\varepsilon \tag{116}$$

und die Tatsache, daß die Geraden T_4, Λ_1, Λ_2 und Λ_3 durch denselben Punkt F_4 gehen, drückt sich jetzt aus durch das Verschwinden aller dreizeiligen Determinanten der Matrix

$$\left\|\begin{array}{ccc}1 & -B & -C\\ 0 & \eta\delta\,(Br_1+r_2) & Cq_1+q_3\\ (Br_1+r_2) & 0 & \delta\varepsilon\,(p_3\,B-p_2\,C)\\ \varepsilon\eta\,(Cq_1+q_3) & -(p_3\,B-p_2C) & 0\end{array}\right\| \tag{117}$$

Die Determinante der letzten drei Zeilen gibt hier

$$(Br_1+r_2)\,(Cq_1+q_3)\,(p_3\,B-p_2\,C)\,.\,(\delta^2\,\varepsilon^2\,\eta^2-1)=0,$$

also, da die ersten drei Faktoren $\neq 0$ sind (da sonst T_4 durch F_1, F_2 oder F_3 gehen würde und also ein Doppelflachpunkt vorhanden wäre):

$$\delta^2\,\varepsilon^2\,\eta^2-1=0 \text{ oder } (\delta\,\varepsilon\,\eta-1)\,(\delta\,\varepsilon\,\eta+1)=0, \tag{118}$$

d. h. es gilt eine der Gleichungen (101) oder (102). Die Anwesenheit einer T_4 bedingt also für die vierten Einheitswurzeln δ, ε und η von (99) eine der Beziehungen

$$\left\{\begin{array}{l}\delta\,\varepsilon\,\eta=+1 \quad \text{(Fall I)} \quad \text{und}\\ \delta\,\varepsilon\,\eta=-1 \quad \text{(Fall II).}\end{array}\right. \tag{119}$$

Berechnet man die übrigen Determinanten aus (117), so erhält man für B und C:

$$\left\{\begin{array}{l}Q_1=(BCq_1+Bp_3\,.\,\delta\quad\;+Cr_2\,.\,\varepsilon^3)\;(1-\delta\,\varepsilon\,\eta)=0\\ Q_2=(BCq_1-Bp_3\,.\,\varepsilon^3\,\eta^3+Cr_2\,.\,\varepsilon^3)\;(1-\delta\,\varepsilon\,\eta)=0\\ Q_3=(BCq_1+Bp_3\,.\,\delta\quad\;-Cr_2\,.\,\delta\,\eta)\,(1-\delta\,\varepsilon\,\eta)=0.\end{array}\right. \tag{120}$$

Wir behandeln zuerst den *Fall I* mit $\delta\,\varepsilon\,\eta=+1$. Dann liegen nach (101) die drei Flachpunkte F_1, F_2 und F_3 auf einer Geraden L:

$$L=x_1\,q_1+x_2\,\delta\,p_2+x_3\,\delta\,p_3=0. \tag{121}$$

Es ist dann auch

$$\gamma=\beta\,\varepsilon \tag{122}$$

und aus (112) berechnet man leicht, daß auch F_4 auf der Geraden L gelegen ist.

Die Ausdrücke Q_i von (120) verschwinden und man rechnet leicht nach, daß auch Ω von (110) für alle B und C Null wird.

Nach (109) haben wir jetzt:

$$\begin{cases} H_{22} = 12\,\delta^2\,Bq_1\,p_2\,p_3\,(Bq_1 + \delta\,p_2) \\ H_{33} = 12\,\delta^2\,Cq_1\,p_2\,p_3\,(Cq_1 + q_3) \end{cases} \tag{123}$$

womit nach (108)

$$\begin{cases} b = \delta^2\,q_1\,p_2\,p_3\,(Bq_1 + \delta\,p_2) - aB \\ c = \delta^2\,q_1\,p_2\,p_3\,(Cq_1 + q_3) - aC \end{cases} \tag{124}$$

folgt, so daß sich f nun in der Form schreiben läßt:

$$f = L^4 + 12\,(a - \delta^2\,q_1^2\,p_2\,p_3)\,x_1\,x_2\,x_3\,T_4 \tag{125}$$

mit

$$L = x_1\,q_1 + x_2\,\delta\,p_2 + x_3\,\delta\,p_3 \text{ und } T_4 = x_1 - Bx_2 - Cx_3.$$

B und C können also willkürlich gewählt werden ($\neq 0$), nur darf T_4 nicht durch F_1, F_2 oder F_3 gehen.

Eine fünfte Flachtangente T_5 mit B', C' würde einen Punkt F_5 geben, der auch auf L gelegen wäre, was unmöglich ist, da L sonst fünf Punkte mit der C_4 gemein hätte. T_5 müßte also durch einen der vier Punkte F_i gehen, wir hätten also wieder einen Doppelflachpunkt.

Im Falle II haben wir $\delta\,\varepsilon\,\eta = -1$, woraus

$$\gamma = -\beta\,\varepsilon \tag{126}$$

folgt. Nach (102) gehen jetzt die drei Geraden $P_i\,F_i$ durch einen Punkt. Die drei Kegelschnitte $Q_i = 0$ werden jetzt mit einander identisch und gegeben durch

$$Q = (Bp_3 - Cp_2) + q_1\,BC\,\delta^3 = 0. \tag{127}$$

T_4 gehört also dem Kegelschnitte

$$Q\,(U) = U_2\,U_3\,\delta^3\,q_1 - U_3\,U_1\,p_2 + U_1\,U_2\,p_3 = 0 \tag{128}$$

an. Er ist dem Dreieck $T_1\,T_2\,T_3$ eingeschrieben und wird von T_i im Punkte F_i berührt.

Aus (127) folgen

$$B = \frac{C\,p_2}{p_3 + \delta^3\,q_1\,C}, \quad C = \frac{B\,p_3}{p_2 - \delta^3\,q_1\,B};$$

setzen wir dies in H_{33} bzw. H_{22} von (109) ein, wobei jetzt (126) zu berücksichtigen ist, so wird

$$\frac{H_{22}}{B} = 4\, q_1\, p_2\, p_3\, \eta^2\, \varepsilon\, (r_2 - B r_1), \quad \frac{H_{33}}{C} = 4\, q_1\, p_2\, p_3\, \delta^2\, (q_3 - C q_1) \tag{129}$$

und hiermit nach (108):

$$12\, b = \frac{H_{22}}{B} - 12\, aB, \quad 12\, c = \frac{H_{33}}{C} - 12\, aC. \tag{130}$$

Hiermit sind b und c durch a ausgedrückt und wir erhalten also ∞^1 Kurven C_4 mit vier gegebenen Flachtangenten, wobei auf drei von ihnen die zugehörigen Flachpunkte noch beliebig wählbar sind, wonach auch der vierte Flachpunkt F_4 festliegt. F_4 ist der Berührungspunkt von T_4 mit dem Kegelschnitt Q.

Ist nun $$T_5 \ldots x_1 = B' x_2 + C' x_3$$

eine *fünfte Flachtangente*, so gibt (130)

$$\frac{H_{22}}{B} - 12\, aB = \frac{H_{22}'}{B'} - 12\, aB',$$

also nach (129) wegen $B \neq B'$:

$$\begin{cases} 3\, a = -\, q_1^2\, p_2\ p_3\ \delta^2 & \text{und hieraus nach (130)} \\ 3\, b = -\, q_1\ p_2^2\, p_3\, \delta^3 & \\ 3\, c = +\, q_1\ p_2\ p_3^2\, \delta^3\ . & \end{cases} \tag{131}$$

Durch T_5 liegen also alle Koeffizienten von f fest, und zwar unabhängig von B' und C', wenn nur $Q\,(B', C')$ nach (127) Null ist.

Als Gleichung des Kegelschnittes Q in Punktkoordinaten haben wir nach (127):

$$Q(x) = \begin{vmatrix} 0 & p_3 & -p_2 & x_1 \\ p_3 & 0 & q_1\delta^3 & x_2 \\ -p_2 & q_1\delta^3 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = x_1^2\, q_1^2\, \delta^2 + x_2^2\, p_2^2 + x_3^2\, p_3^2 + 2\, x_2\, x_3\, p_2\, p_3 - 2\, x_3\, x_1\, p_3\, q_1\, \delta^3 + 2\, x_1\, x_2\, q_1\, p_2\, \delta^3 = 0. \tag{132}$$

Setzen wir (131) in (98) ein, so ergibt sich

$$f = (Q\,(x))^2, \tag{133}$$

d. h. die C_4 zerfällt hier in den doppelt gezählten Kegelschnitt Q. Für diese C_4 ist jeder Punkt Flachpunkt und jede Tangente Flachtangente.

§ 8. Zusammenfassung.

Wir unterscheiden — die Fälle mit einem und mit zwei Flachelementen beiseite lassend — zwei große Klassen:

A. C_4 ohne Doppelflachpunkte.

B. C_4 mit mehrfachen Flachpunkten.

Bei A. haben wir drei Unterklassen:

A1: keine drei Flachtangenten durch denselben Punkt;

A2: genau drei Flachtangenten durch denselben Punkt;

A3: genau vier Flachtangenten durch denselben Punkt.

Die Klasse B zerfällt in:

B1: ein Doppelflachpunkt;

B2: ein dreifacher Flachpunkt.

Auf Grund dieser Einteilung ergeben sich (die Anzahl der Flachelemente ist zwischen eckige Klammern gesetzt):

A1a: drei T_i. Gleichung der C_4 nach (98) mit (99), [3].

A1b: vier T_i. Nach Gleichung (119) mit zwei Typen; beim ersten Typus nach Gleichung (125) liegen die vier Flachpunkte auf einer Geraden. Beim zweiten Typus bilden die vier T_i vier Dreiecke und die Verbindungslinien der drei Flachpunkte eines jeden dieser Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten gehen durch denselben Punkt (Gleichungen (130)). Es gibt keine T_5 [4].

A2a: T_1, T_2 und T_3 gehen durch denselben Punkt P_1 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$), Gleichung (80). Es gibt stets eine T_4 und die vier Flachpunkte liegen auf einer Geraden; [4].

A2b: T_1, T_2 und T_3 durch P_1; T_5 abhängig von T_4 nach (86); [5].

A2c: T_1, T_2 und T_3 durch P_1; T_5 und T_6 abhängig von T_4 nach Gleichungen (95); τ ist eine Wurzel aus (92). Es gibt keine T_7; [6].

A3a: T_1 bis T_4 durch P_1. $f = x_1^4 + 12\, m x_2\, x_3\, (x_2 - \lambda\, x_3)\, (x_2 - \mu\, x_3)$; die vier Flachpunkte F_i liegen auf einer Geraden; [4].

A3b: T_1 bis T_4 durch P_1, T_5 bis T_8 durch P_2, T_9 bis T_{12} durch P_3. Je vier F_i auf einer Geraden $P_r\ P_s$. Normalform der C_4 nach Gleichung (78) $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$; [12].

B1a1: P_1 ist Doppelflachpunkt $F_1 = F_2$; T_1 und T_2 getrennt; nach Gleichung (8) ist $f = f_4\,(x_2, x_3) + x_1\, x_2\, x_3\, (a x_1 + b x_2 + c x_3)$ mit $a \neq 0$; [2].

B1a2: P_1 ist Doppelflachpunkt $F_1 = F_2$. T_1 und T_2 getrennt; T_3 und T_4 gehen nicht durch P_1. Nach (φ_1') ist $f = (p_2\, x_2 + p_3\, x_3)^4 + {} + x_1\, x_2\, x_3\, (a x_1 + b x_2 + c x_3)$ mit $a \neq 0$. F_1, F_3 und F_4 liegen auf einer Geraden; [4].

B1a3: So wie B1a2 mit T_5 und T_6 nach Gleichungen (35); F_1, F_5 und F_6 auf einer Geraden; [6].

B1a4: So wie B1a3 mit T_7 und T_8 nach Gleichungen (58); F_1, F_5 und F_6 und ebenso F_1, F_7 und F_8 auf einer Geraden; [8].

B1b1: P_1 Doppelflachpunkt $F_1 = F_2$; $T_1 = T_2 =$ Gerade $x_2 = 0$. Nach Gleichung (φ_2) wird $f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^2 (a x_1 + b x_2 + c x_3)$ mit $a \neq 0$; [2].

B1b2: So wie B1b1; T_3 und T_4 nicht durch P_1; F_1, F_3 und F_4 auf einer Geraden; nach Gleichung (φ_2') wird

$f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2^2 (a x_1 + b x_2 + c x_3)$ mit $a \neq 0$; [4].

B2a1: $P_1 (x_2 = 0, x_3 = 0)$ ist dreifacher Flachpunkt $F_1 = F_2 = F_3$; drei getrennte Flachtangenten T_1, T_2 und T_3; nach Gleichung (ψ_1) wird $f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3)$ mit $\tau \neq 0$; [3].

B2a2: Wie B2a1. $T_4 (x_1 = 0)$ nicht durch P_1; $f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + + x_1 x_2 x_3 (x_2 - \tau x_3)$ mit $\tau \neq 0$; [4].

B2a3: Wie B2a1, T_4 und T_5 nicht durch P_1; Gleichung (20); [5].

B2b1: P_1 ist dreifacher Punkt $F_1 = F_2 = F_3$; $T_1 = T_4$; nach Gleichung (ψ_2) ist $f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^2 x_3$; [3].

B2b2: Wie B2b1, T_4 nicht durch P_1; $f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2^2 x_3$; [4].

B2c1: P_1 ist dreifacher Punkt $F_1 = F_2 = F_3$ und $T_1 = T_2 = T_3$; nach Gleichung (ψ_3) ist $f = f_4(x_2, x_3) + x_1 x_2^3$; [3].

B2c2: Wie B2c1, T_4 nicht durch P_1; $f = (p_2 x_2 + p_3 x_3)^4 + x_1 x_2^3$; [4].

Buchbesprechungen.

Introduction to the Foundations of Mathematics. Von *R. L. Wilder*. XIV, 305 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman &. Hall, Ltd. 1952. $ 5.75.

Man erlebt es immer wieder, daß Absolventen einer Mittelschule, die sogar an der Hochschule einige Mathematikvorlesungen gehört haben, im späteren Leben die Meinung von sich geben, daß die Mathematik ein starres, nunmehr abgeschlossenes System sei, welches die absolute Wahrheit zum Gegenstand habe. Die Grundlagenfragen der Mathematik, die Existenz einer mathematischen Logik, man könnte vielleicht sagen, der Geist der Mathematik ist ihnen fremd geblieben. Nach des Verfassers Vorwort zu schließen, scheint diese Situation ziemlich international zu sein und um hier Abhilfe zu schaffen, hat der Autor schon vor 20 Jahren an der Michigan Universität eine Vorlesung über Grundlagen der Mathematik begonnen. In der im Buche dargebotenen Gestalt umfaßt diese jetzt eine Einführung in die axiomatische Methode, in die Mengenlehre, dann den Aufbau des Systems der reellen Zahlen und den Gruppenbegriff und seine Bedeutung für verschiedene Zweige der Mathematik. Ein zweiter Teil ist den eigentlichen Grundlagenfragen gewidmet, behandelt den Logizismus, Intuitionismus und Formalismus und schließt mit einem Abschnitt über die kulturelle Stellung der Mathematik. Die langjährige Erfahrung des Autors kommt der Darstellung in didaktischer Hinsicht außerordentlich zu gute. Das Buch ist ein Beispiel dafür, daß man dem Leser nicht allzuviel zuzumuten braucht und ihm trotzdem eine klare und ausreichende Vorstellung der behandelten Gegenstände vermitteln kann. Es sei z. B. auf die vorzügliche Entwicklung einiger Grundtatsachen der euklidischen ebenen Geometrie aus einem Teil des Hilbertschen Axiomensystems verwiesen, welche die axiomatische Methode gut illustriert und trotzdem keine tiefschürfende Analyse des Materials erfordert. Dabei ist die Darstellung aber niemals oberflächlich und der Abschnitt über die Mengenlehre beschränkt sich nicht nur auf eine flüchtige Beschreibung deren Situation, sondern ist zugleich eine sehr brauchbare Einführung in diese Disziplin. Besonders hervorgehoben sei noch der Abschnitt über die intuitionistische Auffassung in der Mathematik. Hier ist es dem Verfasser gelungen, die schwierige Brouwer'sche Auffassung der Mengentheorie in verständlicher Weise zu skizzieren. Bei der Besprechung des Formalismus findet sich eine klare Exposition der Hauptpunkte für den Beweis des Gödelschen Unableitbarkeitstheorems.

Die immer steigende Bedeutung der Verbandstheorie gerade für die Grundlagen der Mathematik und Logik hätten vielleicht auch eine Aufnahme dieser Begriffswelt gerechtfertigt. Die umfangreiche Bibliographie gibt allerdings unter anderem einen Hinweis auf *Birkhoffs* „Lattice Theory". Alles in allem gibt das Werk einen trefflichen Überblick und ist meiner Meinung nach geeignet, auch dem Nichtmathematiker, der eine gewisse Höhe des abstrakten Denkens gewonnen hat, eine Vorstellung vom „erhabenen Geist der Mathematik" zu vermitteln.

L. Schmetterer, Wien

Introduction to Metamathematics. Von *C. Kleene*. Band I. (Bibliotheca Mathematica.) X, 550 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1952. fl. 32.50.

Trotz des besonders in letzter Zeit stark angewachsenen Schrifttums, das eine Reihe ausgezeichneter Monographien über Einzelfragen der Mathematischen Logik aufzuweisen hat, fehlt es seit dem Erscheinen des 2. Bandes der „Grundlagen der Mathematik" von *Hilbert-Bernays* an einer voraussetzungslos lesbaren zusammenfassenden Darstellung der wichtigsten Ergebnisse dieser Disziplin, wenn man von dem Buch von Beth, das z. T. referierenden Charakter trägt, absieht. Dieser Mangel ist nun behoben. Natürlich mußte eine Stoffauswahl getroffen werden. Der Name des Verf. bürgt dafür, daß sie nicht fehlgegangen ist. Der höhere Prädikatenkalkül, mehrwertige Logiken, die ja kürzlich eine interessante Behandlung in der Monographie von *Rosser* und *Turquette* gefunden haben und die Analysis (und somit die Untersuchungen von *Lorenzen* über die gestufte Analysis) blieben außer Betracht. Aber der klassische Prädikatenkalkül, die formalisierte Zahlentheorie, die Theorie der rekursiven Funktionen, Beziehungen zur intuitionistischen Auffassung und andere Problemkreise werden in verständlicher Art entwickelt und alle jene Ergebnisse, die sich an die Namen *Bernays*, *Church*, *Gentzen*, *Gödel*, *Hilbert*, *Skolem*, *Tarski* u. a. knüpfen, finden hier ihren Platz und systematische Darbietung. Die Darstellung wird bis an die neuesten Ergebnisse herangeführt, so daß man an Hand der umfangreichen Bibliographie zu den noch im Fluß befindlichen Entwicklungen vordringen kann. — Die Sammlung Bibliotheca Mathematica hat sich durch das Werk des Verf. mit einem wirklich vielversprechenden Anfang eingestellt. *L. Schmetterer*, Wien

Die mathematische Denkweise. Von *A. Speiser*. Dritte Auflage. („Wissenschaft und Kultur": Band 1.) Mit 11 Textabb., 10 Tafeln, 128 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1952. sfr. 14.55.

Das bereits wohlbekannte Buch des Schweizer Mathematikers liegt nun in neuer Auflage vor. Es stellt sich die Aufgabe, in verschiedenen Gebieten geistiger Tätigkeit die spezifisch mathematischen Gesichtspunkte hervorzuheben. So werden mathematische Elemente in Gebieten aufgezeigt, die zunächst überhaupt nichts mit Mathematik zu tun haben, wie etwa in verschiedenen philosophischen Systemen, in der „Divina Comedia" von *Dante*, in der „Farbenlehre" von Goethe u. a. m. Sehr interessant sind sicherlich die mathematischen Zusammenhänge in der Ornamentik und in der Musik. Das Verständnis für diese wird durch zahlreiche, schöne Abbildungen und Notenbeispiele in vortrefflicher Weise vermittelt. Ein bemerkenswerter Abschnitt beschäftigt sich mit dem Leben und den Anschauungen von *Kepler*.

Das vorliegende Buch wendet sich an einen sehr weiten Leserkreis. Außer den Mathematikern werden auch Philosophen, Künstler, Literarhistoriker und überhaupt alle Gebildeten das Buch mit Interesse lesen. *K. Prachar*, Wien

Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht. Von *H. Hasse*. 36 S. Wiesbaden: Verlag für angewandte Wissenschaften. 1953. DM 4.80.

Das Büchlein ist aus einem Vortrag entstanden, den der Verfasser vor einem Publikum von Nichtmathematikern gehalten hat. Es ist interessant zu lesen, wie ein bedeutender Mathematiker von seiner Wissenschaft denkt, was sie ist und warum er sie betreibt. Obwohl sich der Verfasser dafür entschuldigt, daß er kein Dichter sei, ist das Büchlein in einem glänzenden Stil verfaßt. Das Prädikat ‚Macht" ist dabei nicht in irgend einem materiellen Sinn gemeint, wie hier

betont werden soll. Hoffentlich trägt dieser schöne Vortrag recht viel dazu bei, um in weiterem Kreise das Verständnis für die Mathematik zu wecken; ein Verständnis, das leider einer sehr großen Anzahl von sogenannten Gebildeten auch heute noch fehlt. *K. Prachar*, Wien

Eingefangenes Unendlich. Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik. Von *F. von Krbek.* Mit 128 Textabb., VII, 331 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G. 1952. Geb. DM 22.—.

Das *Konrad Knopp* gewidmete Werk trägt den Untertitel: Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik und kann wohl am besten als eine Sammlung mathematisch-historischer Feuilletons bezeichnet werden. Der feuilletonistische Stil mancher Kapitel ist gewiß geeignet, den Leser zu fesseln und zu unterhalten, ermüdet aber durch die zahlreichen Abschweifungen und oft recht triviale Bemerkungen. Die Kapitelüberschriften können nur als Schlagzeilen angesprochen werden, das macht eine Übersicht an Hand des Inhaltsverzeichnisses zur Unmöglichkeit. Wer könnte wohl aus Titeln wie „Götterdämmerung" oder „Mehr ist weniger" auf den Inhalt eines Kapitels schließen?

Trotzdem hat das Buch seine Verdienste; es ist recht wohl geeignet, dem mathematisch unterrichteten Leser eine Übersicht über die geschichtliche Entwicklung seines Faches zu vermitteln. Der Stoff gliedert sich in drei Abschnitte von je 7 Kapiteln. Im ersten Abschnitt werden, wie der Verfasser selbst sagt, Streifzüge durch das Gesamtgebiet unternommen, die über die Psychologie der Forscher und ihre Einzelschicksale an markanten Beispielen orientieren. Im zweiten Abschnitt werden Arithmetik, Algebra und Analysis in ihrer Entwicklung vom vorgriechischen Zeitraum bis auf unsere Tage vorgeführt, während der letzte Abschnitt dasselbe für die Geometrie besorgt.

Ohne Zweifel ist der Verfasser ein kenntnisreicher Mathematiker und hat sich mit Erfolg bemüht, in engem Rahmen ein in großen Linien gezeichnetes Bild der geschichtlichen Entwicklung zu geben. Natürlich mußte dabei vieles an sich Wichtige übergangen werden, doch wird man gegen die getroffene Auswahl kaum ernstliches einwenden können. Der Verf. versteht auch, wo er rein mathematische Tatbestände vorführt, dies mit unleugbarem Geschick zu tun und auch kompliziertere Dinge klar und einleuchtend darzustellen. Einige sachliche Beanstandungen seien allerdings vermerkt: die allzu naive Mengenlehre, für die die Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten kein Problem ist (S. 194/5; der Verf. lehnt es ausdrücklich ab, seine Überlegung als eine bloß heuristische zu bewerten!), die falsche Behauptung über verschwindende Quaternionenprodukte (S. 256) und die Vermengung der asymptotischen Reihen mit der Summationstheorie (S. 302).

Ein Wort noch über den Schluß des Buches, der eine herbe Kritik des heutigen Wissenschaftsbetriebes zum Inhalt hat. Gewiß steckt ein richtiger Kern in den Ausführungen des Verfassers, der gegen Massenproduktion und Spezialistentum zu Felde zieht und als Gegenmittel historische Studien empfiehlt. Aber der Ton seiner durch eine bösartige Karikatur eines jungen Gelehrten unterstrichenen Vorwürfe läßt jede Achtung vor der geistigen Arbeit und den positiven Leistungen der jungen Generation vermissen, die ohne eigene Schuld unter ganz anderen Voraussetzungen zu arbeiten genötigt ist, als sie in früherer Zeit gegeben waren.

Wir glauben im Sinn des Verfassers zu handeln, wenn wir sein Buch für Studierende in höheren Semestern, die schon über einen gewissen Bestand an Fachkenntnissen verfügen, als anregenden Lesestoff empfehlen, der der Synthese ihrer Einzelkenntnisse nur förderlich sein kann. *J. Radon*, Wien

Die pandiagonalen Quadrate vierter Ordnung. Von *R. Reissig.* (Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften; Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse: Band 100, Heft 6.) 54 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1952. DM 5.—.

Ein pandiagonales Quadrat n-ter Ordnung ist eine n-reihige quadratische Matrix aus natürlichen Zahlen, in der die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen alle ein und denselben Wert s haben. (Zu einer Diagonale gehören alle Elemente a_{ik}, für die $|i - k|$ oder $(i + k)$ [mod. n] einen festen Wert hat.) Im ersten Teil der Arbeit finden sich einige allgemeine Untersuchungen über das lineare Gleichungssystem, welches diese Bedingungen ausdrückt und über eine Gruppe, die es ungeändert läßt. Im zweiten Teil wird die Anzahl der pandiagonalen Quadrate vierter Ordnung berechnet (als Funktion von s). Die benützte Methode knüpft an eine Abhandlung von *W. Schnee* an, indem die Aufgabe in ein Gitterpunktproblem übersetzt wird. *K. Prachar*, Wien

Linear Algebra and Matrix Theory. Von *R. R. Stoll.* 272 S. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Company. 1952. $ 6.—.

Das Buch ist für Studierende geschrieben, die bereits etwas mit linearer Algebra, insbesondere mit Determinanten vertraut sind, und nun ihre Kenntnisse in der linearen Algebra, besonders in der Matrizenrechnung erweitern und vertiefen wollen. Dabei wird keine praktische, sondern eine theoretische Ausbildung angestrebt, die im Studium der modernen Algebra später ihre Fortsetzung finden soll. Vom Leser werden nicht viel Vorkenntnisse verlangt, wohl aber eine gewisse mathematische Reife, die ihn imstande setzt, den abstrakten, inhaltsreichen, aber nicht leicht geschriebenen Ausführungen folgen zu können. Die ersten fünf Kapitel bringen eine determinantenfreie Auflösung linearer Gleichungssysteme, Vektorräume, Elemente der Matrizenrechnung, Determinanten, bilineare, quadratische und Hermitesche Formen. Sie vermitteln Kenntnisse, die heute in den Anwendungen oft gebraucht werden. Die Kapitel 6—8 stellen an den Leser höhere Anforderungen und bringen: Lineare Transformationen, insbesondere deren Charakterisierung vom gruppentheoretischen Standpunkt; die volle lineare Gruppe und wichtige Untergruppen, Polynommatrizen, kanonische Darstellung von linearen Transformationen, Elementarteilertheorie, Äquivalenz, insbesondere Kongruenz und Ähnlichkeit; unitäre und euklidische Vektorräume. Das Buch enthält eine große Anzahl numerischer Beispiele. Die Darstellung geht teilweise neue Wege, besonders in der zweiten Hälfte des Buches. Im Literaturverzeichnis sollten die Bücher von *van der Waerden* über „Moderne Algebra, I, II" und „Gruppen linearer Substitutionen" angeführt werden. *N. Hofreiter*, Wien

The Higher Arithmetic. An Introduction to the Theory of Numbers. Von *H. Davenport.* (Hutchinson's University Library; Mathematical and Physical Sciences. Herausgegeben von Sir George P. Thomson.) VIII, 172 S. London—New York—Melbourne—Sydney—Cape Town: Hutchinson's University Library. 1952. Geb. 8 s. 6 d. net.

Dieses Buch ist für alle mathematisch Interessierten bestimmt und setzt keine Vorkenntnisse voraus. Es beginnt mit den einfachsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen und geht bis zu den binären quadratischen Formen und einfachen diophantischen Gleichungen, umfaßt also ungefähr den Stoff einer Vorlesung über elementare Zahlentheorie. Der besondere Reiz dieses Buches liegt

in der Behandlung der entwickelten Gegenstände, welche jedes Kapitel zu einem Glanzstück meisterhafter Darstellung machen. Jedes Theorem wird durch numerische Beispiele vorbereitet und an ihnen erläutert, gewinnt so Leben, regt den Leser selbst zur Mitarbeit an und läßt ihn verstehen, warum sich so viele große Mathematiker so intensiv mit Zahlentheorie beschäftigt haben. Es ist selbstverständlich, daß alle Sätze einwandfrei dargestellt sind. Geschichtliche Bemerkungen und kurze Noten, welche jedem Kapitel beigefügt sind, geben Ausblicke auf den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft. Das Werk enthält auch Einzelheiten, welche in anderen Darstellungen im allgemeinen nicht zu finden sind oder neu sind. So findet sich hier, wohl zum erstenmal in einem Lehrbuch, der wichtige Satz von *Chevalley* über Kongruenzen in mehreren Variablen. Interessant ist das Problem der Bedeckungskongruenzen. Bei dem Beweis des Hauptsatzes der quadratischen Reste schließt sich der Verfasser an *H. Scholz* an, aber seine Darstellung ist bedeutend einfacher. Bemerkenswert ist auch ein Algorithmus von *N. A. Draim* für die Zerlegung großer Zahlen in Primfaktoren. Dieses Buch wird der Zahlentheorie sicher neue Freunde zuführen und kann nur empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Einführung in die Zahlentheorie. Von *F. Neiß*. VIII, 113 S. Leipzig: S. Hirzel Verlag. 1952. DM 4.80.

Das Buch beginnt mit den von der Schule bekannten Dingen wie: Teilbarkeit, Primzahlen, Neuner- und Elferprobe, größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinschaftliches Vielfache. Selbstverständlich werden diese Begriffe einwandfrei erklärt und die Sätze exakt bewiesen. Für den Fundamentalsatz von der Zerlegung in Primfaktoren werden zwei Beweise gebracht. Es folgen: Kettenbrüche, insbesondere Kontinuante und damit ein Beweis für die Darstellung einer Primzahl von der Form $4s + 1$ als Summe zweier Quadrate. Relativ ausführlich werden sodann die unimodularen Substitutionen und ihre Darstellung durch Matrizen behandelt. Im Kapitel: Restsysteme werden auch die für die Algebra wichtigen Begriffe: Ring, Ideal, Gruppe, Körper gebracht. Nun folgen: zahlentheoretische Funktionen, kleiner Fermatscher Satz, der Wilsonsche Satz, der Satz von Thue über Reste nach einer Primzahl. Die nächsten Kapitel bringen: algebraische Kongruenzen, Primitivwurzeln, quadratische Reste, Quadratsummendarstellung, das quadratische Reziprozitätsgesetz, binäre quadratische Formen (Äquivalenz, Automorphe Transformationen, Pellsche Gleichung, Darstellung einer Zahl durch eine quadratische Form, Reduktion). Die hier entwickelte Theorie der Reduktion der indefinitiven quadratischen Formen unterscheidet sich von der sonst üblichen Darstellung. Das Buch schließt mit einer großen Anzahl interessanter Aufgaben.

Wer Interesse für die durch eigentümlichen Reiz ausgezeichneten Gesetzmäßigkeiten der ganzen Zahlen hat und die Grundlagen der Zahlentheorie kennen lernen will, der greife zu diesem Buch. Es ist ohne besondere Vorkenntnisse leicht zu lesen. *N. Hofreiter*, Wien

Über das Reziprozitätsgesetz im Körper der dritten Einheitswurzeln. Von *H. Brandt*. (Nova Acta Leopoldina. Abhandlungen der deutschen Akademie der Naturforscher zu Halle: Neue Folge, Band 15, Nr. 106, S. 163—188.) Leipzig: J. A. Barth. 1952.

Der Verfasser leitet zwei Fassungen des Reziprozitätsgesetzes im Körper der dritten Einheitswurzeln ab, ohne auf die bekannten allgemeinen Reziprozitätsgesetze Bezug zu nehmen. Alle Betrachtungen werden auf Rechnung begründet.

Allzu abstrakte Überlegungen werden mit Absicht vermieden. An Vorkenntnissen wird nur ganz wenig aus der Zahlentheorie vorausgesetzt.

N. Hofreiter, Wien

General Topology. Von *W. Sierpinski*. Übersetzt von C. Krieger. (Mathematical Expositions: Nr. 7.) XII, 290 S. Toronto: University of Toronto Press. 1952.

Das vorliegende Werk weist natürlich eine gewisse Verwandtschaft mit der bekannten „Introduction to General Topology" (1934) desselben Verf. auf, doch kann man nicht sagen, daß es sich jetzt um dasselbe Werk nur in anderem Gewande handelt, sondern man könnte das neue Buch als einen noch stattlicheren und prächtigen Nachfahren seines Vorgängers bezeichnen. In der vielfach geänderten Anlage sind zwar noch die Züge des älteren Werkes erkennbar, doch gestaltet sich schon die Einführung der grundlegenden Begriffe anders. Lag ehedem eine axiomatische Kennzeichnung der offenen Mengen zu Grunde, so wird nun vom klassischen Konzept der V-Räume von *Fréchet* ausgegangen. Es ist nicht möglich, im Rahmen einer kurzen Besprechung alle jene zahlreichen Ergänzungen und neuen Ideen, die in den Text verwoben sind, im Einzelnen zu kennzeichnen. Wir weisen auf das interessante Ergebnis von *Hausdorff* (1936) hin, daß die Menge aller reellen Zahlen als eine Summe von $\aleph_1$ wachsenden G_δ-Mengen darstellbar ist, welches hier mit etwas modifiziertem Beweis dargestellt ist. Bekanntlich reicht dieser Satz bisher „am nächsten" an die Kontinuumshypothese heran und beleuchtet hochinteressante Problemstellungen des Verf. (vgl. Fundamenta Math. 1 (1920)). Die auf den Verf. zurückgehende Bemerkung, daß man vermöge dieses Satzes die Gerade als Vereinigung von $\aleph_1$ fremden nicht leeren $F_{\sigma\delta}$-Mengen darstellen kann, schließt sich an. Bei der Besprechung der analytischen Mengen findet sich das ebenfalls auf den Autor zurückgehende erst kürzlich gefundene Gegenbeispiel zum berühmten Satz von *Souslin*, daß dieser in einem vollständigen und lokal separablem Raum nicht mehr zu gelten braucht. Einer weiteren Komplettierung dient die Erwähnung von Resultaten mit ausgiebigen Literaturhinweisen. Außerdem finden sich jetzt in jedem Kapitel eine Reihe von Problemen — meist mit Lösungen versehen — die fast stets der Erweiterung des Gesichtskreises und nicht nur der Übung dienen. Obwohl die obige Auswahl aus den neueren Ergebnissen stark subjektiven Charakter trägt und noch lange fortgesetzt werden könnte, möge sie als Andeutung dessen angesehen werden, daß das Buch vielfach bis an die Grenzen des heutigen Wissens über diesen Gegenstand vorstößt. Trotzdem ist es leicht lesbar und die Lektüre auch ohne besondere Vorkenntnisse gewinnbringend. Einen Anhang über transfinite Zahlen hat wie schon in der „Introduction" wieder die Übersetzerin beigesteuert.

L. Schmetterer, Wien

Die Schaubarkeit in der Axonometrie. Von *A. Müller*. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 100, Heft 3.) 22 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1952. $ —.72.

Der Verfasser unterscheidet in der darstellenden Geometrie verzerrte und schaubare Bilder und stellt mehrere Gesichtspunkte zusammen, die nach seiner Ansicht für eine gute Schaubarkeit erfüllt sein sollen. Eingehend wird die Schaubarkeit der normalen Axonometrie behandelt. Für mehrere vorgeschriebene Verkürzungsverhältnisse der Einheitsstrecken auf den drei Achsenrichtungen können aus einer Tabelle bzw. aus einem Nomogramm jene Winkelwerte entnommen werden, mit deren Hilfe sich der Normalriß des Achsenkreuzes zeichnen läßt.

Die sehr breite, sich manchmal wiederholende Darstellung enthält manchen unklaren Satz. *J. Laub*, Wien

Rechenmethoden der Quantentheorie. Dargestellt in Aufgaben und Lösungen. Erster Teil: Elementare Quantenmechanik. Von *S. Flügge*, unter Mitarbeit von *H. Marschall*. Zweite, völlig neubearbeitete und vermehrte Auflage. („Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete". Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band LIII.) Mit 30 Textabb., VIII, 272 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. DM 29.80, geb. DM 32.80.

Dieses Buch entwickelt in Form von Aufgaben und den daran angeschlossenen Lösungen die Methoden zur rechnerischen Behandlung konkreter Probleme der Atomphysik. Funktionentheoretische Hilfsmittel werden kaum verwendet, wie ich glaube mit Recht. Daß nach so kurzer Zeit (die erste Auflage erschien 1947) bereits eine neue Auflage herausgebracht werden konnte, zeigt, daß dieses Buch und seine Gestalt sich vortrefflich bewährt hat. Der hier vorliegende Band in der stark umgearbeiteten zweiten Auflage beschränkt sich auf die Ein- und Mehrkörperprobleme, welche mit der Schrödingergleichung und der elementaren unrelativistischen Spintheorie behandelt werden können. Vom mathematischen Standpunkt aus sei hervorgehoben, daß bei den W. K. B.-Verfahren (welches nebenbei bemerkt, von den Mathematikern schon vor dem Bestehen der Quantenmechanik verwendet wurde) die exakte Begründung von *E. R. Langer* gegeben wird und das sehr wirkungsvolle neue Schwingersche Variationsprinzip behandelt wird.

Das Buch ist nicht nur für den Physiker, sondern auch für den Mathematiker von großem Interesse und kann nur empfohlen werden.

E. Hlawka, Wien

Arithmetik und Geometrie. 4. Teil für die 4. Klasse der Mittelschulen. Von *F. Prowaznik* und *F. Klusacek*. Mit 176 Abb., 242 S. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1951.

Ein Teil der Mittelschüler schließt mit der 4. Klasse das Mittelschulstudium ab und wendet sich einem praktischen Berufe zu; ein anderer Teil besucht nach der 4. Klasse Fachschulen zur weiteren Ausbildung. Die 4. Klasse hat somit nicht nur die Aufgabe, die Schüler für die Oberstufe vorzubereiten, sondern sie hat einen gewissen Abschluß in der Schulbildung zu erreichen und den austretenden Schülern das erforderliche Rüstzeug zu geben, um gegebenenfalls Fachschulen technischer oder anderer Art besuchen zu können. Wie diese verschiedenen Ziele im Mathematikunterricht erreicht werden können, zeigt in vorbildlicher Weise der vorliegende Band für die 4. Klasse. Klare Ausdrucksweise, sinnvolles Rechnen, Sachrechnen aus den verschiedensten Anwendungsgebieten kennzeichnen das Buch.

Mit gleichem pädagogischem Geschick ist der Stoff der Geometrie dargestellt; das funktionale Denken, auf das stets großer Wert gelegt wird, wird besonders an geometrischen Beispielen gepflegt.

Das ausgezeichnete Buch, das mit vielen schönen Abbildungen und zahlreichen geschichtlichen Bemerkungen versehen ist, kündet von reicher Erfahrung und großem pädagogischem Geschick der Verfasser.

J. Laub, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von

Dr. phil. **Adalbert Duschek,**
o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

Soeben erschien: In vier Bänden

Band III. **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.** Mit 107 Textabbildungen. IX, 512 Seiten. Lex.-8°. 1953.

S 220.—, DM 36.50, $ 8.70, sfr. 37.40.
Ganzleinen S 235.—, DM 38.80, $ 9.25, sfr. 39.80.

Früher erschienen:

Band I. **Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. Lex.-8°. 1949.

S 99.—, DM 26.—, $ 6.20, sfr. 27.—
Ganzleinen S 110.—, DM 29.—, $ 6.90, sfr. 30.—.

Band II. **Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder.** Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten. Lex.-8°. 1950.

S 99.—, DM 26.—, $ 6.20, sfr. 27.—
Ganzleinen S 110.—, DM 29.—, $ 6.90, sfr. 30.—.

Jeder Band ist einzeln käuflich. Die Bände I und II stellen ein in sich abgeschlossenes Werk dar.

In Vorbereitung:

Band IV. **Randwertprobleme. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplacetransformationen.**

Soeben erschien:

Grundlagen der Elektronenoptik

Von

Dr. **Walter Glaser**
o. Professor an der Technischen Hochschule Wien

Mit 445 Textabbildungen. X, 699 Seiten. Lex.-8°. 1952.

Ganzleinen S 600.—, DM 120.—, $ 28.60, sfr. 124.—.

Das Buch vermittelt in lehrbuchmäßiger Darstellung die theoretischen Grundlagen der Elektronenoptik. Obwohl keine besonderen Kenntnisse des Lesers vorausgesetzt werden, reicht das Buch bis zu den letzten Ergebnissen auf diesem Gebiet. Es kann daher in gleicher Weise dem Studenten als Einführung und dem Spezialisten als Nachschlagewerk dienen. Auch der selbständig Forschende wird viele Anregungen finden. Im ersten Teil werden die Grundlagen für die Dimensionierung von elektrischen und magnetischen Elektronenlinsen gebracht, wobei auch auf numerische und experimentelle Methoden der Feld- und Bahnbestimmung eingegangen wird. Im zweiten Teil des Buches findet sich eine ausführliche Darstellung der geometrischen Aberrationen und Ablenkungssystme. Diese können auch dem angehenden Lichtoptiker als Einführung in die G a u ß sche Dioptrik dienen. Abschließend wird insbesondere die Frage des Auflösungsvermögens vom Standpunkt der Wellenmechanik behandelt. Der Techniker wird in diesem Teil eine willkommene, von praktischen Fragen ausgehende Einführung in die Wellenmechanik finden.